速通代数几何笔记

Ridongen
2025中科院北大代数与数论暑期学校提高班
2025.7.30-2025.8.22

Contents

1 前言 **4**

2 2025.7.30 **5**
2.1 纤维积 5
2.2 概形X上不同的结构层 6
2.3 拟凝聚层 6
2.4 拟凝聚层的性质 7
2.5 拟凝聚层的张量积 7
2.6 闭浸入 8

3 2025.8.1 **9**
3.1 射影空间 9
3.2 line bundle，vector bundle和Picard群 10
3.3 separated，proper morphism 12

4 2025.8.4 **14**
4.1 前言 14
4.2 历史 14
4.3 一些定义的回顾 16

5 2025.8.6 **17**
5.1 17
5.2 proper 18
5.3 一些意识 19
5.3.1 19
5.3.2 极限 19
5.3.3 projective态射是proper的 19

6 2025.8.8 **21**
6.1 Proj 21
6.2 Serre twist 21
6.3 Serre twist的全局 23
6.4 凝聚层的分解定理和截面延拓引理 23
6.5 上同调前言 24

7 2025.8.11 **27**
7.1 光滑性前言 27
7.2 光滑曲线的定义 27
7.3 Cech覆盖 27
7.4 Serre对偶定理 29
7.5 Serre对偶定理的射影曲线推广 31
7.6 切空间、余切空间前言 31

8 2025.8.13 **32**
8.1 光滑态射($\to \mathrm{Spec} k$) 32
8.2 仿射空间的切空间 32
8.3 光滑proper连通曲线 33
8.4 微分 34

9 2025.8.15 **36**
9.1 可分与微分、光滑的关系 36
9.2 Fundamental Exact Sequences 36
9.3 平坦 37
9.4 光滑态射($\to S$) 38
9.5 étale态射以及一些例子 39
9.6 曲线 39

10 2025.8.18 **42**
10.1 一些回顾 42
10.2 除子 44
10.3 除子的拉回 45

11 2025.8.20 **46**
11.1 Riemann-Roch定理 46
11.2 Abel-Jacobi Map 47
11.3 群概形、椭圆曲线 48

12 2025.8.22 **50**
12.1 代数群 50
12.2 特征曲线 50

1 前言

这份Latex笔记是笔者为了巩固日常上课内容而产生的副产物，比较适合复习回顾使用。但对于未上过暑期学校的读者，可能需要额外的背景知识和一些已经培养好的学科感觉。要是完全没学过就相当于直接浏览一下大致内容吧，知道代数几何后面要学点什么。

这里会预留一些proof的空白，代表课上讲过相关证明并且是一句话带过的，为了减少编辑笔记的时间就略过了。

2025.7.30-2025.8.1是许大昕老师的最后两次课，前面内容因为笔者暑校之前学过就略过了。 2025.8.4起都是张志宇老师授课。

许大昕老师阶段用的参考资料是Dr. Peter Scholze的Lecture Note的1-12节内容，张志宇老师阶段和Harsthorne这本书相关的内容：第一周proper是Ch II.4-5, Ch III. 4-5，第二周smooth是Ch II. 6,8, Ch III. 9-10，第三周groups and curves是Ch IV 4 + 更多例子和计算。一些例子可以参考Gortz上相应内容。

由于笔者也是初学所以如有错误请多多包涵!

（开个火箭也是挺爽的～）

2 2025.7.30

2.1 纤维积

引理 2.1 (Yoneda)**.** 设$\mathcal{C}$是一个范畴，则典范函子$\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}) : X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$是fully faithful的。

定义 2.1. 记$\mathrm{Sch}_{/S}$是一个范畴，对象是$(f : X \to S)$，态射$g : X \to Y$满足交换图：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

例 2.1. (1) $S = \mathrm{Spec}(k[x])$，其中k是一个域，$\mathrm{Sch}_{/S}$就是k上代数几何。

(2) 任何概形拥有唯一到$\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$的态射，并且由$\mathrm{AffSch} \simeq \mathrm{Ring}^{op}$和粘接定理可以推出$\mathrm{Sch} \simeq \mathrm{Sch}_{/\mathrm{Spec}\mathbb{Z}}$。

$\mathrm{AffSch}_{/S}$是$\mathrm{Sch}_{/S}$的满子范畴：

定义 2.2. 记函子$h_X := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_{/S}}(-, X)$，将$h_X$限制在$\mathrm{AffSch}_{/S}$上成为$\mathrm{AffSch}_{/S}^{op} \to \mathrm{Set}$的函子，则称$X(A) := h_X(\mathrm{Spec}A)$为$X$的$A$-值点。

性质 2.1. $\mathrm{Sch}_{/S} \to \mathrm{Fun}(\mathrm{AffSch}_{/S}, \mathrm{Set})$是fully faithful的。

定义 2.3. 给定$X, Y \in \mathrm{Sch}_{/S}$，纤维积$X \times_S Y$是一个$S$-概形，配备有态射$X \times_S Y \to X$和$X \times_S Y \to Y$，使得有如下图泛性质：

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dotted, "\exists!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ & Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

定理 2.1. 设$X, Y \in \mathrm{Sch}_{/S}$，则纤维积$X \times_S Y$存在。

一个范畴论的解释视角是：对于集合范畴中两个对象及态射$f : E_1 \to E$，$g : E_2 \to E$，纤维积$E_1 \times_E E_2$总是存在的，且可以如下表示：

$$E_1 \times_E E_2 = \{(x, y) \in E_1 \times E_2 \mid f(x) = g(y)\}$$

对于$X, Y \in \mathrm{Sch}_{/S}$，我们可以构造函子$h: \mathrm{Sch}_{/S}^{op} \to \mathrm{Set}: T \to h_X(T) \times_{h_S(T)} h_Y(T)$，根据fully faithful，存在$S$-概形(其实就是我们所需求的$X \times_S Y$)使得$h = h_{X \times_S Y}$。

2.2　概形X上不同的结构层

定义 2.4. X是约化的：如果对任何开集U，$\mathcal{O}(U)$都是约化环。

性质 2.2. (1) 一个仿射概形$X = \mathrm{Spec}A$是约化的当且仅当A是约化环。

(2) 概形X是约化的当且仅当任何仿射开子集都是约化的。

性质 2.3. 对于概形X，记$\mathcal{O}_{X,red}$是预层$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)_{red}$的层化，则$(|X|, \mathcal{O}_{X,red})$是一个概形，成为$X$上与$\mathcal{O}_X$不同的结构层。

2.3　拟凝聚层

定义 2.5. A是一个环，M为A-模，$X = \mathrm{Spec}A$，$\mathcal{B} := \{D(f) : f \in A\}$，那么$D(f) \mapsto M_f$成为开集基$\mathcal{B}$上的层，记为$\widetilde{M}$。

同时，在$x = \mathfrak{p} \in X$的stalk是$\widetilde{M}_x = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} M_f \simeq M_{\mathfrak{p}}$。

定义 2.6. $(X, \mathcal{O}_X)$是ringed space，称一个X上的Abel群层$\mathcal{M}$是$\mathcal{O}_X$-模：如果配备有层态射$\mathcal{O}_X \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，使得对于任何开集$U$，$\mathcal{M}(U)$都是$\mathcal{O}_X(U)$-模。

例 2.2. $X = \mathrm{Spec}A$，M是A-模，$\widetilde{M}$是一个$\mathcal{O}_X$-模。

定理 2.2. (1) $X = \mathrm{Spec}A$，则函子$\mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X} : M \to \widetilde{M}$是fully faithful的。

(2) $X = \mathrm{Spec}A$，$\mathcal{M}$是一个$\mathcal{O}_X$-模，如果存在一个开覆盖$X = \cup_{i \in I} D(f_i)$使得$\mathcal{M}|_{D(f_i)} \simeq \widetilde{M_i}$对某个$A_{f_i}$模$M_i$成立，那么$A$-模$M := \mathcal{M}(X)$使得$\mathcal{M} \simeq \widetilde{M}$。

这个定理可以通过一个更强的结论来证明：

引理 2.2. $X = \mathrm{Spec}A$，$\mathcal{N}$是一个$\mathcal{O}_X$-模，那么$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \mathcal{N}) \to \mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{N}(X))$是双射。

定义 2.7. X是一个概形，$\mathcal{M}$是一个拟凝聚$\mathcal{O}_X$-模：如果存在一个仿射开覆盖$X=\cup_{i\in I}\mathrm{Spec}A_i$，使得$\mathcal{M}|_{\mathrm{Spec}A_i}\simeq\widetilde{M_i}$对某个$A_i$-模$M_i$成立。

上述定理能够说明上述定义和X的仿射开覆盖的选取无关，即"存在"与"任意"等价。

推论 2.1. $X=\mathrm{Spec}A$，那么函子$\mathrm{Mod}_A\to\mathrm{Qcoh}(X):M\mapsto\widetilde{M}$成为范畴等价。

2.4 拟凝聚层的性质

性质 2.4. $\mathcal{M},\mathcal{N}\in\mathrm{Qcoh}(X)$，$f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$是$\mathcal{O}_X$-模态射，对于开集$U$，$(\ker f)(U):=\ker(f(U):\mathcal{M}(U)\to\mathcal{N}(U))$，那么$\ker f$成为一个$\mathcal{O}_X$-模，并且仍然是拟凝聚的。

性质 2.5. 一些记号同上，定义$\mathrm{coker}f$是预层$U\mapsto\mathrm{coker}(f(U):\mathcal{M}(U)\to\mathcal{N}(U))$的层化。那么$\mathrm{coker}f$成为一个$\mathcal{O}_X$-模，并且仍然是拟凝聚的。

2.5 拟凝聚层的张量积

定义 2.8. $\mathcal{M},\mathcal{N}\in\mathrm{Qcoh}(X)$，记$\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{N}$为预层$U\mapsto\mathcal{M}(U)\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}\mathcal{N}(U)$的层化，那么$\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{N}$成为一个$\mathcal{O}_X$-模，并且仍然是拟凝聚的。

定义 2.9. $f:X\to Y$是概形态射，自然有push forward函子$f_*:\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}\to\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_Y}$。对于pull back函子$f^*:\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_Y}\to\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}$为：$f^*\mathcal{N}:=\mathcal{O}_X\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}f^{-1}\mathcal{N}$。

性质 2.6. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{N},\mathcal{M})\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N},f_*\mathcal{M})$

Proof.

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{N},\mathcal{M})&=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}f^{-1}\mathcal{N},\mathcal{M})\\&\simeq\mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}(f^{-1}\mathcal{N},\mathcal{M})\\&\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N},f_*\mathcal{M})\end{aligned}$$

□

性质 2.7. 函子f^*保持拟凝聚性。特别地：$f:X=\mathrm{Spec}A\to\mathrm{Spec}B$，$\mathcal{N}=\widetilde{N}$，那么$f^*\mathcal{N}=\widetilde{N\otimes_B A}$。

证明需要用到Yoneda引理。

性质 2.8. (1) 一个拓扑空间X是拟紧的：如果它的任何开覆盖都有有限子覆盖。一个拓扑空间X是拟分离的：如果它的任何两个拟紧开集的交还是拟紧的。

(2) $f : X \to Y$是两个拓扑空间的连续映射，称f是拟紧的(resp.拟分离的)：如果对于任意拟紧(拟分离)开集$U \subseteq Y$，$f^{-1}(U)$是拟紧的(resp.拟分离的)。

性质 2.9. 如果概形态射$f : X \to Y$是拟紧且拟分离的，那么函子f_*保持拟凝聚性。

2.6 闭浸入

定义 2.10. 称概形态射$f : Z \to X$是一个闭浸入：如果作为拓扑空间的连续映射f是一个闭嵌入，即Z和$f(Z)$同胚且$f(Z)$是X的闭子集，同时$f^\flat : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Z$是满的。

性质 2.10. $\ker f^\flat$是一个拟凝聚的$\mathcal{O}_X$上的理想层。相反，如果给定一个拟凝聚的$\mathcal{O}_X$上的理想层$\mathcal{I}$，那么$(\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}), \mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$成为一个闭浸入，其中$\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) = \{x \in X : (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x \neq 0\}$。

例 2.3. X是一个概形，考虑预层$U \mapsto \mathrm{Nilrad}(\mathcal{O}_X(U))$的层化，成为一个拟凝聚的$\mathcal{O}_X$上的理想层$\mathcal{N}$，我们有：$X_{red} = (|X|, \mathcal{O}_X/\mathcal{N})$.

定义 2.11. 一个概形态射$f : X \to Y$是仿射的：如果仿射开集的原像还是一个仿射开集。

性质 2.11. $f : Z \to X$是一个闭浸入当且仅当f是仿射的且对于任意$U = \mathrm{Spec}A \hookrightarrow X$为仿射开集，$f^{-1}(U) = V = \mathrm{Spec}B$，诱导出的$f^\flat(U) : A \to B$是满同态。特别地，若$X = \mathrm{Spec}A$是仿射概形，那么$f : Z \to X$是闭浸入当且仅当$f$仿射并且$f^\flat(X) : A \to \mathcal{O}_Z(Z) = B$是满同态。

3 2025.8.1

3.1 射影空间

先给出粘接引理的标准版本：

引理 3.1. 设$\{U_i\}_{i\in I}$是一组概形，$\forall i\neq j\in I$，$U_{ij}\subseteq U_i$是U_i的开子集，$U_{ii}=U_i$，和$\alpha_{ij}:U_{ij}\to U_{ji}$是概形同构，满足如下cocycle condition：

$$\alpha_{ij}\circ\alpha_{jk}=\alpha_{ik}\text{ on }U_{ijk}:=U_{ij}\cap U_{ik}$$

那么存在一个概形$X=\bigcup_{i\in I}V_i$，和$\beta_i:V_i\to U_i$概形同构，使得对于任意$i,j\in I$，$\beta_i|_{V_i\cap V_j}:V_i\cap V_j\to U_{ij}$是概形同构，并且$\alpha_{ij}=\beta_j\circ\beta_i^{-1}$。

例 3.1. 域k上n维射影空间$\mathbb{P}^n(k)=\cup_{i=0}^n\mathbb{A}^n(k)$.

例 3.2. A是环，对于$i=0,\dots,n$，记$U_i=\mathrm{Spec}A[X_{ij}]_{j\neq i}\simeq\mathbb{A}_A^n$，（这里$X_{ij}$可以理解成"$x_j/x_i$"），对于$i\neq j$， $U_{ij}=D(X_{ij})=\mathrm{Spec}A[X_{ik},X_{ij}^{-1}]_{k\neq i}$，考虑$\alpha_{ij}:U_{ij}\to U_{ji}$是概形同构，由相应的环同态：

$$\begin{aligned}A[X_{jk},X_{ji}^{-1}]&\to A[X_{ik},X_{ij}^{-1}]\\ X_{jk}&\mapsto X_{ik}/X_{ij}\forall k\neq j,i\\ X_{ji}&\mapsto X_{ij}^{-1}\end{aligned}$$

可以验证满足cocycle condition，因此可以粘接成一个概形，记为$\mathbb{P}_A^n$.

性质 3.1. $\mathbb{P}_A^n\times_{\mathrm{Spec}A}\mathrm{Spec}B\simeq\mathbb{P}_B^n$.

定义 3.1. 对于一个概形S，定义$\mathbb{P}_S^n:=\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n\times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}}S$

性质 3.2. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(\mathbb{P}_A^n)=A$

定义 3.2. S是一个概形，一个态射$X\to S$称为一个射影态射：如果存在一个闭浸入$X\to\mathbb{P}_S^n$使得复合上典范的$\mathbb{P}_S^n\to S$就是上述态射。

例 3.3. Segre嵌入：

$$\mathbb{P}^m_A \times \mathbb{P}^n_A \to \mathbb{P}^{mn+m+n}_A$$
$$((x_i)_{i=0}^m, (y_j)_{j=0}^n) \mapsto (x_i y_j)_{i=0,j=0}^{m,n}$$

这是一个闭浸入。

3.2 line bundle，vector bundle和Picard群

定义 3.3. X是一个概形，一个line bundle（或称可逆$\mathcal{O}_X$-模）$\mathcal{L}$，是一个拟凝聚的$\mathcal{O}_X$-模，使得存在一个拟凝聚的$\mathcal{O}_X$-模$\mathcal{N}$，使得$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \simeq \mathcal{O}_X$。我们称$\mathcal{N}$是$\mathcal{L}$的逆。
特别地，若$X = \mathrm{Spec}A$，$\mathcal{L} = \widetilde{L}$可逆当且仅当$L$是可逆的，即函子$L \otimes_A - : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$是范畴等价。

定理 3.1. A是一个环，存在如下双射：

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(A) \longleftrightarrow \left\{A^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow L, L\text{可逆}A\text{-模}\right\}/\sim$$

其中$(p : A^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow L) \sim (p' : A^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow L')$当且仅当存在 $f : L \to L'$同构，使得$f \circ p = p'$。

这个证明需要用到如下针对模的粘接引理：

引理 3.2. 如下两个范畴等价：

(1) Mod_A

(2) 一列A_{f_i}-模M_i，配有$\alpha_{ij} : M_{i,f_j} \to M_{j,f_i}$的同构，满足cocycle condition.

例 3.4. $A = k$，有结论：可逆k-模$\simeq k$，对于右边集合，抛开等价关系，$\alpha : k^{n+1} \twoheadrightarrow k$和$(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} - \{0\}$形成一一对应，而等价关系相当于$(x_0, \ldots, x_n) \sim (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n), \lambda \neq 0$，这其实就是$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(k)$.

经过粘合我们能得到：

推论 3.1.

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(X) \longleftrightarrow \left\{\mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{L}, \mathcal{L}\text{可逆}\mathcal{O}_X\text{-模}\right\}/\sim$$

定义 3.4. 上述推论中代入$X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$，$\mathrm{id}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}$对应的$\mathcal{L}$记为$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}(1)$。对于$m \in \mathbb{N}^*$，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}(m) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}(1)^{\otimes m}$。
对于拟凝聚层$\mathcal{E}$，记层$\mathcal{E}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) : U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{O}_U)$，这是个拟凝聚$\mathcal{O}_X$-模。对于$m \leqslant -1$， $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}(m) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}(-m)^\vee$.

定义 3.5. X是一个概形，一个vector bundle$\mathcal{E}$是一个拟凝聚的$\mathcal{O}_X$-模，满足局部有限秩，即存在一个开覆盖$X = \cup_{i\in I} U_i$，和$\beta_i : \mathcal{E}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus n_i}$的同构。如果对于任何$i \in I$，$n_i$是一个常数$n$，则称$\mathcal{E}$是一个秩为$n$的vector bundle。如果$n = 1$，则$\mathcal{E}$是line bundle。

性质 3.3. $\Gamma(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}(1)) \simeq \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]_{(1)}$，记为1次齐次部分。更一般地，对$m \geqslant 1$， $\Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(m)) \simeq A[x_0, \dots, x_n]_{(m)}$。

这里提供一个直观的想法：考虑
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}) \times \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}^{\oplus n+1}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}) \times \mathcal{O}(1)(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}(U_i) \times \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}^{\oplus n+1}(U_i) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}(U_i) \times \mathcal{O}(1)(U_i) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}(U_{ij}) \times \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}^{\oplus n+1}(U_{ij}) \arrow[r, two heads] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}(U_{ij}) \times \mathcal{O}(1)(U_{ij})
\end{tikzcd}$$
记$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}}^{\oplus n+1}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}})$中的$e_i$通过第一行被映到$T_i$，第二行是能够显式写出来的（如果$U_i = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[X_{il}]_{l\neq i}$，那么$e_l \mapsto X_{il}, e_i \mapsto 1$），可知$T_i|_{U_i}$是$\mathcal{O}(1)(U_i)$的生成元$s_i$，$T_i|_{U_j} = X_{ji}s_j$。我们如果粗略当成"$s_i = X_{ji}s_j = (x_i/x_j)s_j$"，那很容易会发现$T_i \sim s_i \sim x_i$，因此结合$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$全局是$\mathbb{Z}$粗略得到$\mathcal{O}(1)$全局是全体1次齐次多项式。 □

性质 3.4. 对X上拟凝聚层$\mathcal{M}$，由如下一一对应：
$$\begin{aligned}
\Gamma(X, \mathcal{M}) &\longleftrightarrow \{\varphi : \mathcal{O}_X \to \mathcal{M}\} \\
s &\mapsto (\forall U \in \mathrm{Ouv}(X), \varphi_U : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{M}(U) : 1 \mapsto s|_U) \\
\varphi_X(1) &\leftarrow \varphi
\end{aligned}$$

定义 3.6. X上line bundle商掉一个典范的等价关系后成为一个群，由$\mathcal{L} \cdot \mathcal{N} := \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$，$\mathcal{L}^{-1} := \mathcal{L}^\vee$和$1 := \mathcal{O}_X$给出，这个群记为$\mathrm{Pic}(X)$，称为$X$的Picard群。

性质 3.5. $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathbb{Z}$，由$\mathcal{O}(m) \mapsto m$给出。

性质 3.6. 可以完整给出$\mathbb{P}^1_k$上vector bundle的分类： $\mathcal{E} \simeq \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}(d_i)$.

3.3　separated，proper morphism

性质 3.7. T是一个拓扑空间，那么THausdorff当且仅当对于对角映射$\Delta : T \to T \times T : t \mapsto (t,t)$，$\Delta(T)$是个闭集。

定义 3.7. $f : X \to S$是一个separated morphism：如果由下述诱导的$\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$是一个闭浸入。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\Delta_{X/S}"] \arrow[drr, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, "\mathrm{id}"'] & & \\
& X \times_S X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

称一个概形是separated的：如果典范$X \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$是separated的。

例 3.5. $\mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec}k[T]$，$\mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec}k[S]$，分别有两个开集$D(T)$和$D(S)$，我们给出两个$k[T,T^{-1}] \to k[S,S^{-1}]$环同构：$\alpha^+ : T \mapsto S$和$\alpha^- : T \mapsto S^{-1}$，那么$\mathbb{A}_k^1 \cup_{\alpha^-} \mathbb{A}_k^1 = \mathbb{P}_k^1$，它是separated的概形。然而$\mathbb{A}_k^1 \cup_{\alpha^+} \mathbb{A}_k^1$并不是separated的概形。

例 3.6. 对于任何一个仿射概形之间的态射$\mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$，诱导的$\Delta_{\mathrm{Spec}B/\mathrm{Spec}A} : \mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}B \times_{\mathrm{Spec}A} \mathrm{Spec}B$恰好由环同态$B \otimes_A B \to B : b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2$给出，这显然是一个满射，因此上述$\Delta_{\mathrm{Spec}B/\mathrm{Spec}A}$是一个闭浸入，从而任何一个仿射概形之间的态射都是separated的。

推论 3.2. 任何一个仿射态射都是separated的。

定义 3.8. 对于概形态射$i : X \to Y$，称为局部闭浸入：如果i可以分解成$X \hookrightarrow V \hookrightarrow Y$，其中第一个是闭浸入，第二个是开浸入。
事实上这等价于：

(1) i拓扑上是一个局部闭浸入，记X的值域在它的闭包里开。

(2) 层态射$i^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}$是满的。

性质 3.8. $f : X \to S$概形态射，那么$\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$总是一个局部闭浸入。

性质 3.9. 对于：
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

(1) 如果f, g是separated的，那么h也是separated的。

(2) 如果h是separated的，那么f是separated的。

性质 3.10. X是separated的，那么对于任何仿射开子集U, V，$U \cap V$也是仿射的。

性质 3.11. X是separated的，那么X作为拓扑空间是quasi-separated的。

定义 3.9. $f : X \to S$是概形态射，称为有限型的：如果对于
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}A \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}R \arrow[r, hook] & S \end{tikzcd}$$
A总是有限生成的R-代数。

定义 3.10. $f : X \to S$是闭映射：如果把X的闭集映到S的闭集。称为universally closed：如果对于任意的概形态射$g : S' \to S$，$f_{S'} : X \times_S S' \to S'$总是闭映射。

定义 3.11. $f : X \to S$是proper morphism：如果它是separated、finite type和universally closed的。

在之后研究上同调时，proper条件会保证我们可以使用一些良好的性质，比如有限性。

例 3.7. (1) $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$是proper的，然而$\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$不是proper的（不满足universally closed）。

(2) 闭浸入是proper的。

(3) 射影态射$f : X \to S$是proper的。

4 2025.8.4

注：本节开始由张志宇老师授课。

4.1 前言

定理 4.1 (**Bezout**). 对一般的$f_1, f_2 \in \mathbb{C}[X,Y]$（需满足部分限制条件）， $C_1 : \{f_1 = 0\}, C_2 : \{f_2 = 0\}$，有$\# C_1 \cap C_2 = \deg f_1 \cdot \deg f_2$.

但是Bezout希望得到一个不含任何限制条件的结论，后来他发现如果在射影空间$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$上考虑相交数，那么结论会更加优美。另外可以注意到在射影空间中两条平行的线是存在交点的，在无穷远处。

后续日程：

(1) Spec$A$—线性代数

(2) proper—有限性

(3) smooth—微分

(4) $-\otimes -$—积分

(5) 群—对称性

(6) 椭圆曲线

4.2 历史

从复分析开始，人们研究：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3 - x}} dx = ?$$

在1820+年，Abel和Jacobi定义椭圆函数，即代入$y^2 = x^3 - x$，发现上述相关问题可以通过椭圆函数来解决。

在1857年提出了Riemann面，当时并没有代数几何工具，因此当时是通过有限映射$X \to \mathbb{P}^1$来研究X，在1865年诞生了Riemann-Roch定理。

后来提出了紧Riemann面X的亏格g_X，并有如下定理：

定理 4.2.

$$\#\{X(\mathbb{C})\text{的洞}\} = g_X = \dim H^1(X, \Omega^1_X) < +\infty$$

其中Ω^1_X是X的一个线丛（光滑的），称为Kahler differential，或被称为"cotangent sheaf"，"family of tangent spaces of $x \in X$".

在1890+年，Poincare发展了代数拓扑，并提出了Poincare对偶。在1930+年，Hodge提出了Hodge理论，

定理 4.3 (**Hodge**)**.** 对于紧Riemann面X，有：

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\Omega_X^1)=\dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathcal{O}_X)$$

如果学过同调代数就知道H^n是利用导出函子来定义的。

定理 4.4 (**Clebsch-Gordan,1860s**)**.** $F\in\mathbb{C}[X,Y]$， $\deg F=d>0$， $X^0:=\{F(x,y)=0\}\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$，那么对一般的$F$，有：

$$X\simeq \text{亏格为}g\text{的Riemann面}-\text{有限点集}$$

此时有：

$$g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}=\dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\Omega_X^1)=\dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathcal{O}_X)$$

例 4.1. $d=3$时，$g=1$，对应椭圆曲线。

Cartan，Leray，Oka致力于研究分析和拓扑之间的关系，而代数几何和拓扑之间也存在很强大的联系，在宏观认知中可以如下理解：

$$\begin{aligned}
\text{Topology} &\longleftrightarrow \text{Algebraic Geometry}\\
\text{compact} &\longleftrightarrow \text{proper}\\
\text{locally }\mathbb{C}^n &\longleftrightarrow \text{smooth}\\
\text{Lie Group} &\longleftrightarrow \text{Algebraic Group}\\
\text{submanifold } Z &\longleftrightarrow \text{quasi}-\text{coherentsheaf}\\
Z_1\cap Z_2 &\longleftrightarrow \mathcal{O}_{Z_1}\otimes\mathcal{O}_{Z_2}
\end{aligned}$$

从而这向代数几何的终极目标推进了：将全部分析手段用代数几何的语言完整刻画出来。

定理 4.5. $K/\mathbb{Q}$是数域， $X=\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K$，那么

$$\mathrm{Pic}(X)\simeq\mathrm{Cl}(K)$$

定理 4.6 (**Buno,2006**)**.** $X\to\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$是有限型regular态射，那么$\mathrm{Pic}(X)$是有限生成Abel群。

定理 4.7 (**Faltings**). X是$\mathbb{Q}$上光滑射影曲线，并且亏格$g_X \geqslant 2$，那么$X(\mathbb{Q})$是一个有限集。

例 4.2. $n \geqslant 5$时， $\#\{x^n + y^n = 1\ x, y \in \mathbb{Q}\} < +\infty$。

Uniform Mordell Conjecture：固定$g \geqslant 2$，存在$c > 0$使得对于任何$\mathbb{Q}$上光滑射影连通曲线，有$\#X(\mathbb{Q}) < c$.

证明想法是考虑一个曲线族，对这个曲线族进行证明。目标是：理解曲线和曲线族。

定义 4.1. S是一个概形， S上的一条椭圆曲线指的是态射$f : X \to S$，X是proper、smooth、group概形，并且f的纤维是维数为1且几何连通的。

例 4.3. $S = \mathrm{Spec}\mathbb{C}$， $\mathbb{C}$上椭圆曲线指$g = 1$的射影光滑曲线并且含有群结构。

注：维数> 1即为Abel簇。

4.3 一些定义的回顾

此处略过概形、纤维积、$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$、proper的定义以及$\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$的计算。

例 4.4. $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$是proper的。

例 4.5. $f : X \to S$若为有限态射，那么是proper的。

例 4.6. $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Spec}\mathbb{C}$不是proper的。

Proof. 考虑$\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{C}} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$，它拓扑上不是闭映射，这是因为考虑$V(XY - 1)$是闭集映到$\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} - \{0\}$为开集。 $\square$

5 2025.8.6

5.1

我们熟知对于一个仿射概形$X = \mathrm{Spec}A$，任何一个开集U可以被若干形如$D(f)$的开集覆盖。但是这个结论对于一般的概形并不成立：

例 5.1. 对于$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$，它的全局是$\Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$，形如$D(f)$的开集要么是空集要么是全集。

解决办法就是考虑线从$\mathcal{L}$：

例 5.2. $\forall 0 \neq x \in \Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(1))(\simeq \mathbb{C}[X,Y]_{(1)})$，有$D(x) \simeq \mathbb{A}^1$.

性质 5.1. 对$f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$，

$$D_{\mathcal{L}}(f) := \{x \in X | f|_{\mathrm{Spec}k(x)} \neq 0\}$$

这是X的开集。

这里我认为$f|_{\mathrm{Spec}k(x)}$的标准定义是指： $f_x \in \mathcal{L}_x$是$\mathcal{O}_{X,x}$-模的一个元素(归功于$\mathcal{L}$是拟凝聚层)， $k(x)$是$\mathcal{O}_{X,x}$的剩余域自动是$\mathcal{O}_{X,x}$-模， $f|_{\mathrm{Spec}k(x)} := f_x \otimes 1 \in \mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$.

Proof. 用到$\mathcal{L}$的一个性质：存在$\{U_i\}$仿射覆盖，使得$\mathcal{L}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}$. □

定理 5.1 (Serre). $X = \mathrm{Spec}A$，则存在等价：

$$\begin{aligned} \Gamma(X, -) : \mathrm{QCoh}(X) &\longleftrightarrow \mathrm{Mod}_A \\ \widetilde{M} &\longleftarrow M \end{aligned}$$

推论 5.1. 条件记号同上，$\Gamma(X, -)$是一个正合函子。

定义 5.1. 称X是Noether概形：如果存在X的有限仿射开覆盖$\{U_i\}$，使得$\mathcal{O}_X(U_i)$都是Noether环。

定义 5.2. X是Noether概形，称$\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$是一个凝聚的$\mathcal{O}_X$-模：如果存在$X$的仿射开覆盖$\{U_i = \mathrm{Spec}A_i\}$，使得存在$A_i$-模$M_i$有限生成，并且$\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M_i}$.

定义 5.3. X是一个拓扑空间：

$$\dim X := \sup\{n \in \mathbb{N} | \exists Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n \subseteq X,\ Z_i\text{不可约闭集}\}$$

特别地，在$X = \mathrm{Spec}A$的Zariski拓扑下，不可约闭集等价于$V(\mathfrak{p})$，从而$\dim X = \dim A$ Krull维数。

例 5.3. $\dim \mathrm{Spec}\mathbb{Z} = 1$，$\dim \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} = n$.

定义 5.4. 称概形X是一条算术曲线(arithmetic curve)：如果$\dim X = 1$。

例 5.4. R是一个DVR，即R同时满足：PID、局部环、$\dim R = 1$，那么$X = \mathrm{Spec}R$是一条算术曲线，我们称为正则局部曲线(local regular curve)。

例 5.5. 考虑$X = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[[T]]$，这是一个算术曲线，并且$X$由两个点构成，闭点$x$对应$(T)$，泛点$\eta$对应$(0)$。这里有一个类比：对于区间$[0,1]$，将$x$类比成0，$\eta$类比成左开右比区间$(0,1]$，这很好展现了闭点和泛点的拓扑性质。

性质 5.2. $(A,\mathfrak{m})$是一个Noether局部环，那么

$$\dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geqslant \dim A$$

并且等号成立且等于1当且仅当A是DVR。

定义 5.5. 称$(A,\mathfrak{m})$是一个正则局部环：如果上述等号成立，即$\dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$。

5.2 proper

推论 5.2. 若$f : X \to S$proper，那么$\mathrm{Im}\ f$在S是闭集。

性质 5.3. (1) f是finite的，那么是proper的。

(2) $f : X \to Y$，$g : Y \to S$，如果$g \circ f$是proper的，并且g是separated的，那么f是proper的。

Proof. 根据fiber product的定义， $f : X \to Y$可以拆成$X \to X \times_S Y \to Y$，第一个$\to$由(id_X, f)给出。

由于g是separated的，故$Y \to Y \times_S Y$是一个闭浸入，由于闭浸入stable under base change，故$X = X\times_Y Y \to X\times_Y Y\times_S Y = X\times_S Y$也是闭浸入，由于闭浸入是proper的，故$X \to X \times_S Y$也是proper的。

再结合proper的复合是proper的，故f是proper的。 □

上述证明很依赖一些base change的性质，相关部分可以参考刘青的教材第三章，重要结论列举的还算清楚。

5.3 一些意识

5.3.1

proper可以简单理解为boundedness。在经典拓扑中紧集会通过连续映射映到紧集(这对于proper会很好)，非紧集就不一定成立了。对于一个态射$f : X \to Y$，Im f在Y中可能既不是开集也不是闭集。

例 5.6. (1) 对于$\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \supseteq V(XY-1) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$“投影映射”，Im $f = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} - \{0\}$，将闭集(指全集)映射到开集。

(2) $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2 : (x, y) \mapsto (xy, y)$的Im f既不是开集也不是闭集。

5.3.2 极限

在直观理解层面上，比如说一个到环面的连续映射$h : (0, 1] \to T^2$，$\lim_{t\to 0} h(t)$存在当且仅当h可以延拓成$\widetilde{h} : [0, 1 \to T^2$。我们回想起例5.5中的理解，在代数几何里可以尝试用Spec$R \to X$，其中R是DVR来刻画：Spec$K \to$ Spec$R$将泛点映到泛点，因此Spec$K$相当于例5.5中的$(0, 1]$，本来有一个Spec$K \to S$，如果”存在极限”，那么对应可以延拓成Spec$R \to S$。这就导出了如下定理：

定理 5.2 (Valuation criterion). $f : X \to S$有限性态射，X是Noether概形，

(1) f是separated的当且仅当对于任何DVR R，Frac$(R) = K$，且Spec$R \to S$，$X(R) \to X(K)$是单射。

(2) f是proper的当且仅当对于任何DVR R，Frac$(R) = K$，且Spec$R \to S$，$X(R) \to X(K)$是满射。

Proof. 参考Hartshorne第2章第4节， □

5.3.3 projective态射是proper的

例 5.7. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \to$ Spec$\mathbb{Z}$是proper的。

定理 5.3. $f: X \to \mathrm{Spec}A$是proper的，其中A是一个Noether环，$\mathcal{L}$是X上的一个线丛，那么$\Gamma(X,\mathcal{L})$是有限生成的A-模。

例 5.8. $A=\mathbb{C}$，$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\mathcal{L})<\infty$.

定理 5.4. $f: X \to S$是proper的，其中X,S是Noether概形，$\mathcal{F}$是X上的一个凝聚层，那么$f_*\mathcal{F}$是S上的一个凝聚层。

最后涉及到Proj概形的分次环构造，略过。

例 5.9. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Proj}\mathbb{Z}[X_0,X_1]$，$D_+(X_0) = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}[X_0,X_1]_{(X_0)}\right)_{\deg=0} = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[X_1/X_0] \simeq \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$.

6 2025.8.8

6.1 Proj

引理 6.1. $\mathrm{Proj}S=\bigcup_{f\in S_d,d>0}D_+(f)$。并且如果$\left(\bigoplus_{d\geqslant n_0}S_d\right)=(f_1,\dots,f_k)$，那么$\bigcup_{i=1}^k D_+(f_i)=\mathrm{Proj}S$。

Proof. □

定义 6.1. 分次环S是良好的：如果同时满足

(1) S_0是Noether环。

(2) 存在$f_0,\dots,f_n\in S_1$，使得S是由这些元素生成的S_0-代数。

例 6.1. $A[X_0,\dots.X_n]$是分次环，其中A是一个Noether环， I是$A[X_0,\dots,X_n]$的一个分次理想，那么$A[X_0,\dots,X_n]/I$是良好的。

我们可以发现：对于良好的S，$\mathrm{Proj}S$可以看成一个射影空间的子空间，这是因为有一个自然的闭浸入：

$$\mathrm{Proj}S\hookrightarrow \mathrm{Proj}S_0[X_0,\dots,X_n]$$

6.2 Serre twist

定义 6.2. $M=\bigoplus_{d\geqslant 0}M_d$是一个分次$S$-模，记$\widetilde{M}$是$X=\mathrm{Proj}S$上的层，由：

$$\widetilde{M}(D_+(f))=(M[\frac{1}{f}])_{\deg=0}$$

给出。

练习：验证确实形成一个层结构。

定义 6.3 (Serre twist)**.** $r\in\mathbb{Z}$，$M:=S(r)$，其中$M_d:=S_{d+r}$，称为Serre twisting module。

定义 6.4. $\mathcal{O}(r):=\widetilde{S(r)}\in\mathrm{QCoh}(\mathrm{Proj}S)$。可以发现

$$\Gamma(D_+(f),\mathcal{O}(r))=(S(r)[\frac{1}{f}])_{\deg=0}=(S[\frac{1}{f}])_{\deg=r}$$

例 6.2. $\bigotimes_{r\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}(r)\in\mathrm{QCoh}(\mathrm{Proj}S)$，可以注意到$D_+(f)\mapsto S[\frac{1}{f}]$.

例 6.3. $M(r) := M \otimes_S S(r)$，则$\widetilde{M(r)} = \widetilde{M} \otimes \mathcal{O}(r)$，可以注意到$\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \widetilde{M(r)}$将$D_+(f) \mapsto M[\frac{1}{f}]$.

定理 6.1 (Serre). $X = \mathrm{Proj} S$，S是良好的分次环：

(1) $\forall \mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$(resp.$\mathrm{Coh}(X)$)，总存在分次$S$-模$M$(resp.分次有限生成模)使得$\mathcal{F} \simeq \widetilde{M}$。

(2) $\mathcal{O}(r)$是X上的线丛。

(3) $\text{Graded Mod}_S \to \mathrm{QCoh}(X) : M \mapsto \widetilde{M}$是一个正合函子。

(4) 上述正合函子有一个伴随函子：

$$\begin{aligned}\Gamma_* : \mathrm{QCoh}(X) &\to \text{Graded Mod}_S\\ \mathcal{F} &\mapsto \Gamma(X, \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(r))\end{aligned}$$

从而$\mathrm{Hom}_{\mathrm{QCoh}}(\widetilde{-}, -) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{Graded Mod}_S}(-.\Gamma_* -)$.

(5) 对任何分次S-模M，存在自然映射：

$$\alpha : M \to \Gamma(X, \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \widetilde{M(r)})$$

$\forall \mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$，存在自然层同构：

$$\beta : \mathcal{F} \simeq \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})}$$

Proof. □

推论 6.1. $X = \mathrm{Proj} S$，$Z \hookrightarrow X$是一个闭嵌入，则存在S的一个齐次理想I使得$Z \simeq \mathrm{Proj}(S/I)$。

例 6.4. $S = A[X_0, \dots, X_n]$，$X = \mathbb{P}^n_A$，有正合列：

$$0 \to S(-1) \to S \to S/(X_0) \to 0$$

其中第二个$\to$是$\cdot X_0$。根据$\widetilde{(-)}$函子的正合性：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A} \to i_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}_A} \to 0$$

其中

$$\mathbb{P}^{n-1}_A \simeq V(X_0) \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A$$

6.3 Serre twist的全局

定理 6.2. $X = \mathbb{P}^n_A$：

$$\Gamma(X, \mathcal{O}(r)) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ (A[X_0, \dots, X_n])_{\deg = r} & r \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(X, \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(r)) = A[X_0, \dots, X_n]$$

推论 6.2. $\Gamma(X, \mathcal{O}(r))$是有限生成$A$-模。

6.4 凝聚层的分解定理和截面延拓引理

目标：$\Gamma(X, \mathcal{F}) = ?$，$\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$.

定理 6.3 (Serre). $X = \mathbb{P}^n_A$，其中A为Noether环， $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$，那么存在满射

$$\mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$$

其中$\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}(n_i)$.

引理 6.2. X是Noether概形， $\mathcal{L}$是线丛， $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$，

$$D_{\mathcal{L}}(f) := X_f := \{x \in X | f_x \notin m_x \mathcal{L}_x\}$$

其中m_x是$\mathcal{O}_{X,x}$的极大理想。 $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$， $s \in \Gamma(D_{\mathcal{L}}(f), \mathcal{F}|_{D_{\mathcal{L}}(f)})$，那么存在$n > 0$，使得$f^{\otimes n} \otimes s \in \Gamma(D_{\mathcal{L}}(f), \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{F})$ 可以”延拓到”$\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{F})$中的元素。

Proof. □

性质 6.1. $f : X \to Y$是仿射态射，则$f_* : \mathrm{QCoh}(X) \to \mathrm{QCoh}(Y)$是一个正合函子。

一个典型的例子就是$f : \mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$，这时拟凝聚层范畴间的函子对应的模范畴间的函子其实就是$\mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A$的遗忘函子。

性质 6.2. 同上，若还有$f : X \hookrightarrow Y$是一个闭嵌入，则$f_* : \mathrm{QCoh}(X) \to \mathrm{QCoh}(Y)$是fully faithful的。

推论 6.3.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr] & & \mathbb{P}^n_A \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}A & \end{tikzcd}$$
其中$X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A$是一个闭嵌入。那么对于任何$\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$，有$i_*\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n_A)$，并且：

$$\Gamma(\mathbb{P}^n_A, i_*\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$$

上述推论说明对于闭嵌入$X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A$，可以直接将$X$视作$\mathbb{P}^n_A$.

6.5 上同调前言

定理 6.4. $f : X \to \mathrm{Spec}A$是proper的，其中A是Noether环。 $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$，那么$\Gamma(X, \mathcal{F})$是有限生成的$A$-模。

定理 6.5. $f : X \to Y$是proper的，其中Y是Noether概形。 $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$，那么$f_*\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(Y)$。

这个定理的证明需要用到Chow引理：

引理 6.3 (**Chow's Lemma**)**.** 设$f : X \to S$是一个proper的态射，其中S是Noether概形。那么存在概形态射$g : X' \to X$使得:

(1) $f \circ g$是projective的。

(2) 存在X的一个稠密开集U使得$g|_{g^{-1}(U)} : g^{-1}(U) \to U$是概形同构。

Chow引理得到的核心思想是：证Proper情况，只要证Projective情况，只要证$\mathbb{P}^n_A$情况。

这里简单阐述Cohomology的由来：我们需要回忆起层之间的满态射$\mathcal{F} to \mathcal{G}$当且仅当对于任何$x \in X$都有$\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$都是满同态，但这不代表$\mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$是满同态。这个解决办法就是引入Cohomology。

定理 6.6. X是概形，则存在函子

$$\begin{aligned} H^i(X,-):\mathrm{QCoh}(X) &\to \text{Abelian Gp.} \\ \mathcal{F} &\mapsto H^i(X,\mathcal{F}) \end{aligned}$$

使得

(1) $H^0(X,\mathcal{F})=\Gamma(X,\mathcal{F})$.

(2) 对层的正合列$0\to\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_2\to\mathcal{F}_3\to 0$，有Abel群长正合列：

$$\begin{aligned} 0\to H^0(X,\mathcal{F}_1)\to H^0(X,\mathcal{F}_2)\to H^0(X,\mathcal{F}_3) \\ \to H^1(X,\mathcal{F}_1)\to H^1(X,\mathcal{F}_2)\to H^1(X,\mathcal{F}_3)\to\dots \end{aligned}$$

(3) $f:X\to Y$仿射态射，则有：

$$H^i(Y,f_*\mathcal{F})\cong H^i(X,\mathcal{F})$$

(4) 若$X=\mathrm{Spec}A$，则有：

$$H^i(\mathrm{Spec}A,\mathcal{F})=0\ \forall i>0$$

(5) $\check{H}^i=H^i$，其中左边为Cech上同调。

定理 6.7. 如果$f:X\to\mathrm{Spec}A$是proper的，$\mathcal{F}\in\mathrm{QCoh}(X)$，则$H^i(X,\mathcal{F})$是有限生成的$A$-模。

阐述下Cech上同调的动机：研究$H^i(\mathbb{P}^n_A,\mathcal{O}(r))$。
最后简单列举下上同调的应用：

例 6.5. 下面k是一个域，X是k上的概形：

(1) 对于线丛$\mathcal{L}$，有：

$$\dim_k \Gamma(X, \mathcal{L}) < +\infty$$

(2) 若这个概形还是proper的，即$X \to \operatorname{Spec} k$是proper的，对于$\mathcal{F} \in \operatorname{Coh}(X)$，可以定义Euler characteristic：

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F}) < \infty$$

特 别 地， 如 果X是proper curve， 则 可 以 定 义 亏 格genus= $\dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$。

(3) (**Bezout Thm**) $\mathbb{P}^1 \supseteq Z_1, Z_2$闭子概形，则有：

$$\chi(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{Z_1} \otimes \mathcal{O}_{Z_2}) = \text{相交数}$$

7 2025.8.11

7.1 光滑性前言

我们对光滑性研究的动机是：希望概形的local geometry足够简单。比如可以找到一些例子，我们不希望它们是光滑的：$X^3-Y^2=0$在$(0,0)$处奇点，$XY=0$在$(0,0)$处也是坏的。一个显然可以作为光滑概形的例子：$\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.

7.2 光滑曲线的定义

定义 7.1. 域k满足char $k=0$，称k上曲线X是光滑的：如果X是正则的。

光滑可以导出一些对偶性质，例如后续会提到的Serre对偶。

定理 7.1. X/k是光滑proper整概形，则有：

$$g_X=\dim_k H^1(X,\mathcal{O}_X)=\dim_k H^0(X,\Omega^1_X)$$

其中Ω^1_X是family of cotangent spaces，后续会提到。
重要的是：这个命题去掉光滑后不成立。

我们将会去定义什么是光滑态射：我们希望态射的光滑性满足：

- stable under base change & composition
- 若$S=\mathrm{Spec}k$，那么和**定义7.1**兼容。
- 可以通过检验局部的光滑性验证整体。

例 7.1.
- 有限型开浸入是光滑态射，但是去掉有限型条件就不成立了。
- $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]\to\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$在2对应的素理想处不成立。

- 有限光滑态射对应有限维Galois扩张理论，其中基本群对应Galois群。
- 全局类域论(Global class field theory)：

$$\pi_1(\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K)^{\mathrm{ab}}\simeq\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$$

- $\Omega^1_{X/S}$会对研究X的结构产生很大作用（微分几何），但其实即使不光滑也能研究。

7.3 Cech覆盖

X是separated概形，回顾**性质3.10**($U,V\subseteq X$仿射开，那么$U\cap V$也是仿射开)，

定义 7.2. 称X的有限覆盖$\{U_i\}_{i=1}^m$是一个好的Cech覆盖：如果每一个U_i是仿射的。

定义 7.3. 记号同上，记$U_{ij} = U_i \cap U_j$，$U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$。对任何$\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$，它的一个Cech复形$C(\{U_i\}, \mathcal{F})$指：

$$\bigoplus_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d^0} \bigoplus_{i<j} \mathcal{F}(U_{ij}) \xrightarrow{d^1} \bigoplus_{i<j<k} \mathcal{F}(U_{ijk}) \xrightarrow{d^3} \cdots$$

其中对$s_i \in \mathcal{F}(U_i), s_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$，有：

$$d^0(s_i) = \bigoplus_j (-1)^i s_i|_{U_{ij}}$$

$$d^1(s_{ij}) = \bigoplus_k (-1)^{i+j} s_{ij}|_{U_{ijk}})$$

一般的d^n类似定义。可以验证$d^{n+1} \circ d^n = 0$，因此确实是一个$Abel$群复形。

定义 7.4. Cech上同调就是上述

$$\check{H}^i(\{U_i\}, \mathcal{F}) := \ker d^i / \mathrm{im} d^{i-1}$$

特别地，可以通过层的基本性质证明：

$$\check{H}^0(\{U_i\}, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

定理 7.2 (**Leray**)**.**

$$\check{H}^i(\{U_i\}, \mathcal{F}) \simeq H^i(X, \mathcal{F}) \quad \forall i$$

推论 7.1. X是仿射概形，则：

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > 0$$

推论 7.2. $f : X \to Y$有限态射，Y是separated的，$\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$，则有：

$$H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(Y, f_*\mathcal{F}) \quad \forall i$$

推论 7.3. 对于separated概形X，

$$H^k(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall k \geqslant \#\{U_i\}$$

例 7.2.

$$H^2(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) = 0$$

推论 7.4. X/kproper整曲线，则有：

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i \geqslant 2$$

7.4 Serre对偶定理

定理 7.3. 对Noether环A：

$$H^i(\mathbb{P}^2_A, \mathcal{O}(r)) = \begin{cases} 0 & i \neq 0, 2 \\ (A[X_0, X_1, X_2])_{\deg = r} & i = 0 \\ (A[X_0^{-1}, X_1^{-1}, X_2^{-1}]/X_0X_1X_2)_{\deg = r} & i = 2 \end{cases}$$

其中：

$$\frac{A[X_0^{-1}, X_1^{-1}, X_2^{-1}]}{X_0X_1X_2} = A\frac{1}{X_0X_1X_2} \oplus A\frac{1}{X_0^2X_1X_2} \oplus A\frac{1}{X_0X_1^2X_2} \oplus \cdots$$

Proof. □

定理 7.4. 对Noether环A，类似有：

$$H^i(\mathbb{P}^1_A, \mathcal{O}(r)) = \begin{cases} 0 & i \neq 0, 1 \\ (A[X_0, X_1])_{\deg = r} & i = 0 \\ (A[X_0^{-1}, X_1^{-1}]/X_0X_1)_{\deg = r} & i = 1 \end{cases}$$

推论 7.5.

$$\dim_k H^0(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}(r)) = r + 1$$
$$\dim_k H^1(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}(r)) = -1 - r$$

上述右式为负时自动取0.

定理 7.5 ($X=\mathbb{P}^n_A$下的**Serre对偶定理**). (1)

$$\dim_k H^i(\mathbb{P}^1_k,\mathcal{O}(r))=\dim_k H^{1-i}(\mathbb{P}^1_k,\mathcal{O}(-r-2))\quad i=0,1\quad r\in\mathbb{Z}$$

(2)

$$\dim_k H^i(\mathbb{P}^n_k,\mathcal{O}(r))=\dim_k H^{n-i}(\mathbb{P}^n_k,\mathcal{O}(-r-n-1))\quad i\in[0,n]\quad r\in\mathbb{Z}$$

(3) 对于$X=\mathbb{P}^n_A$，$\mathcal{F}\in\mathrm{Coh}(X)$，有

$$H^i(X,\mathcal{F})\times H^{n-i}(X,\mathcal{F}^\vee\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}(-n-1))\to A$$

Proof. □

例 7.3. 考虑$C=\{F(X,Y,Z)=0\}\subseteq\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}=\mathrm{Proj}(S)$， $\deg F=d$齐次多项式，$S=\mathbb{C}[X,Y,Z]$。根据短正合列：

$$0\to S\xrightarrow{\cdot F}S\to S/(F)\to 0$$

由于$\widetilde{(-)}$的正合性(**定理6.1(3)**)，得到层的短正合列：

$$0\to\mathcal{O}(-d)\to\mathcal{O}\to i_*\mathcal{O}_C\to 0$$

其中$i:C\hookrightarrow\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$是自然的嵌入。由**定理6.6(2)**，有长正合列：(下述记号省去X)

$$\begin{aligned}0&\to H^0(\mathcal{O}(-d))\to H^0(\mathcal{O})\to H^0(i_*\mathcal{O}_C)\\&\to H^1(\mathcal{O}(-d))\to H^1(\mathcal{O})\to H^1(i_*\mathcal{O}_C)\\&\to H^2(\mathcal{O}(-d))\to H^2(\mathcal{O})\to H^2(i_*\mathcal{O}_C)\to 0\end{aligned}$$

根据**定理7.3**，$H^1(\mathcal{O})=H^2(\mathcal{O})=0$，再结合**推论7.2**，因此有：

$$H^1(C,\mathcal{O}_C)\simeq H^1(X,i_*\mathcal{O}_C)\simeq H^2(X,\mathcal{O}(-d))$$

根据上述例子，有如下推论：

推论 7.6.

$$\begin{aligned}g_C&=\dim_k H^1(C,\mathcal{O}_C)=\dim_k H^2(X,\mathcal{O}(-d))=\dim_k H^0(X,\mathcal{O}(d-3))\\&=\frac{(d-2)(d-1)}{2}\end{aligned}$$

7.5 Serre对偶定理的射影曲线推广

事实上，对于光滑的射影曲线C/k，通过Ω_C^1也有相对应的Serre对偶定理。(特别地，$X=\mathbb{P}^1$时$\Omega_C^1\simeq\mathcal{O}(-2)$).

例 7.4. 对于光滑的射影曲线C/k，有：

$$\dim H^0(C,\mathcal{F})=\dim H^1(C,\mathcal{F}^\vee\otimes\Omega_C^1)$$

特别地，代入Ω^1，由于线丛的性质，我们有：

$$\dim H^0(C,\Omega^1)=\dim H^1(C,\Omega^{1\vee}\otimes\Omega^1)=\dim H^1(C,\mathcal{O}_C)=g$$

7.6 切空间、余切空间前言

如果学过微分流形中切空间和余切空间的定义，将section比作流形上的function时，比较自然能理解如下定义。

定义 7.5. X概形，$x\in X$，有自然的：

$$\mathrm{Spec}\mathcal{O}_{X,x}\longrightarrow X$$

$k(x)=\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$是$x$的剩余域，那么$\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$是$k(x)$-模。
x处切空间：

$$T_xX:=(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2)^*=\mathrm{Hom}_{k(x)}(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2,k(x))$$

余切空间：

$$\Omega_X^1|_x:=(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2)$$

性质 7.1. $f:X\to Y$概形间态射，$y:=f(x)$，则有如下诱导：

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\qquad & f_x^\#:\mathcal{O}_{Y,y}\longrightarrow\mathcal{O}_{X,x}\\
\Longrightarrow\qquad & d_xf:\mathfrak{m}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y}^2\longrightarrow\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2\\
\Longrightarrow\qquad & T_xf:T_xX\longrightarrow T_yY
\end{aligned}$$

第二步归功于local ringed space的定义。

例 7.5. $f:\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]\to\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$，$(1+\sqrt{-1})\mapsto(2)$，注意到此时$\mathfrak{m}_{Y,y}\subseteq\mathfrak{m}_{X,x}^2$，因此$d_xf=0$。后续内容可以由此得出$f$不是光滑的。

8 2025.8.13

8.1 光滑态射($\to \mathrm{Spec}k$)

声明一个目标：希望通过研究$f : X \to Y$和Y的几何性质来研究X。

定义 8.1. 称一个概形X是正则的：如果X是Noether概形，并且$\forall x \in X$，$\mathcal{O}_{X,x}$都是正则局部环。

性质 8.1. $X \to \mathrm{Spec}k$是有限型的，k'/k是域扩张，一般情况下X是正则的不能推出$X_{k'}$是正则的。但是k是代数闭域的时候$X_{k'}$是正则的。

例 8.1. $k = \mathbb{F}_p(t)$，考虑$X = \mathrm{Spec}k[Y]/(Y^p - Y - t)$，则$X$是正则的。考虑$k' = \overline{\mathbb{F}_p(t)}$，则$X_{k'} = \mathrm{Spec}k'[Y]/(Y^p - Y - t)$不是正则的。

定义 8.2. $f : X \to \mathrm{Spec}k$是有限型的，称f是光滑的：如果对于任何域扩张k'/k，$X_{k'}$是正则的。

性质 8.2. 如果k是代数闭域，对于$f : X \to \mathrm{Spec}k$有限型的，X是正则的当且仅当X是光滑的。

这和**性质8.1**说的是同一件事。

8.2 仿射空间的切空间

练习：对$X = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/(f) \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$，对于$X$上的闭点$\mathfrak{p} = (X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n)$，求$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_{X,\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}^2_{X,\mathfrak{p}}$.

Proof. 需要Jacobian of f，即：

$$\nabla f(p) := \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n}(p)\right)$$

来刻画：

$$f(X) = \nabla f(p) \cdot (X - p) + o((X - p)^2)$$

□

定理 8.1. 记号同上，X在p处的切空间T_pX：

$$T_pX \simeq \{v \in \mathbb{C}^n | \nabla f(p) \cdot (v - p) = 0\}$$

推论 8.1. 记号同上，如果f是不可约多项式，$\dim X = n-1$，那么X在p处光滑当且仅当$\dim T_pX = n-1$，当且仅当$\triangledown f(p) \neq 0$.

例 8.2. $X = \{X^2+Y^2=1\} \subseteq \mathbb{A}^2$，在$(x_0,y_0)$的切空间是$2x_0(X-x_0)+2y_0(Y-y_0)=0$.

例 8.3 (Taylor展开). $(A,\mathfrak{m})$是一个Noether正则局部环，$\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$相当于记录"$n$阶导"：代入$A=\mathbb{C}[[t]], \mathfrak{m}=(t)$会看得很清楚。

例 8.4. $\{X^3=Y^2\}$在$(0,0)$处是奇点，同时对应stalk处$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 2 > 1$，对应在此处不光滑，这是正确的。

8.3 光滑proper连通曲线

定理 8.2. 以下三个范畴等价：

- 光滑proper连通$\mathbb{C}$上曲线，其中连通等价于整
- $\mathbb{C}$上紧Riemann面
- $\{K | \exists t \in K-\mathbb{C} \quad \text{s.t. } K/\mathbb{C}(t)\text{是有限扩张}\}$

Proof. 中间需要证一个性质：

性质 8.3. 对于整概形X，有泛点η，它的函数域$K(X) := \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,\eta})$。对于任何属于第三个范畴的域$K$，考虑全体$K$上的离散赋值且满足在$\mathbb{C}$上平凡，这个全体$\simeq$某个属于第一个范畴的曲线$C$的函数域$\mathbb{C}(C)$。这个命题能推出：对于任何属于第三个范畴的域$K$，存在光滑proper连通曲线$C$使得$K \simeq \mathbb{C}(C)$。

□

例 8.5. $\{X^2+Y^2=Z^2\} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$是光滑proper连通曲线，它对应$K = \mathbb{C}(X,\sqrt{1-X^2})/\mathbb{C}(x)$是有限扩张。

8.4 微分

定义 8.3. $A\to B$是环同态，M是B-模，一个M上的A-linear derivation指的是一个A-线性映射：

$$D: B\to M$$

使得:

$$\begin{cases} D(b_1b_2)=b_1D(b_2)+b_2D(b_1) & \forall b_1,b_2\in B \\ D(ab)=aD(b) & \forall a\in A, b\in B \end{cases}$$

全体记为$\mathrm{Der}_A(B,M)$.

例 8.6. $B=A[X_1,\dots,X_n]$，有

$$\mathrm{Hom}_B(\bigoplus_{i=1}^{n}BdX_i, M)\simeq \mathrm{Der}_A(B,M)$$
$$\varphi\mapsto (X_i\mapsto\varphi(dX_i))$$

例 8.7. $B=\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$，$A=\mathbb{C}$，有

$$\mathrm{Hom}_B(BdX\oplus BdY/(2XdX+2YdY), M)\simeq \mathrm{Der}_A(B,M)$$

定理 8.3. $A\to B$是环同态，存在唯一的B-模$\Omega^1_{B/A}$并伴有A-linear derivation d

$$d: B\to\Omega^1_{B/A}$$

使得对于任何B-模M和$D\in\mathrm{Der}_A(B,M)$，存在唯一的B-模同态

$$\pi:\Omega^1_{B/A}\to M$$

使得$D=\pi\circ d$，从而

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A},M)\simeq\mathrm{Der}_A(B,M)\quad\forall M\in\mathrm{Mod}_B$$

Proof. 浅浅用到Yoneda引理。 □

例 8.8.

$$\Omega^1_{\mathbb{Z}[X_1,X_2,\dots]/\mathbb{Z}}=\oplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}[X_1,X_2,\dots]dX_i$$

例 8.9. $A=\mathbb{Z}, B=\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]\simeq\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$，

$$\Omega^1_{B/A}\simeq BdX/2XdX\simeq\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/(2\sqrt{-1})\simeq\mathbb{F}_2[X]/(X^2+1)$$

尝试和数论中的分歧进行关联：2在$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$中是分歧的，同时注意到：

$$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega^1_{B/A}=0$$

这提供了一个关联想法。

定义 8.4. $\varphi:A\to B$是有限型，A是Noether环，称φ是不分歧的：如果$\Omega^1_{B/A}=0$.

Ω^1能够帮助我们通过Y来研究X的几何结构。

定理 8.4. (1) $B'=B\otimes_A A'$，则$\Omega^1_{B'/A'}\simeq\Omega^1_{B/A}\otimes_A A'$.

(2) $S^{-1}\Omega^1_{B/A}\simeq\Omega^1_{S^{-1}B/A}$.

(3) $A\to B$是满同态，则$\Omega^1_{B/A}=0$.

(4) k'/k是有限扩张，则$\Omega^1_{k'/k}=0$当且仅当k'/k是可分扩张。

定理 8.5. $f:X\to S$概形态射，则存在唯一的$\Omega^1_{X/S}\in\mathrm{QCoh}(X)$使得：对任何仿射开子集间诱导的态射$X\supseteq U\to V\subseteq S$，有：

$$\Omega^1_{X/S}|_U\simeq\Omega^1_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_S(V)}$$

它还满足如下性质：

(1) $X\to S$是有限型且S是Noether概形时，$\Omega^1_{X/S}\in\mathrm{Coh}(X)$。

(2) $\Omega^1_{X/S,x}\simeq\Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{S,f(x)}}$.

(3) 对于 $\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & S' \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$ (这里$X'=X\times_S S'$)，有：

$$h^*\Omega^1_{X/S}\simeq\Omega^1_{X'/S'}$$

(4) $p_1:X_1\times_S X_2\to X_1, p_2:X_1\times_S X_2\to X_2$，有：

$$\Omega^1_{X_1\times_S X_2/S}\simeq p_1^*\Omega^1_{X_1/S}\oplus p_2^*\Omega^1_{X_2/S}$$

9 2025.8.15

9.1 可分与微分、光滑的关系

考虑$B = A[X]/(f(X))$，其中A是环，则有：

$$\Omega^1_{B/A} \simeq A[X]/(f'(X), f(X))$$

定义 9.1. 称$f(X) \in A[X]$是可分多项式：如果$(f(X), f'(X)) = 1$且$f(X)$的首项系数属于$A^\times$。当$f(X)$是可分多项式时，对应上述$\Omega^1_{B/A} = 0$。

性质 9.1. $f(X)$是可分多项式$\in A[X]$，$B = A[X]/(f(X))$，则有：$\mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$有限型光滑态射。

9.2 Fundamental Exact Sequences

定理 9.1.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$
有一个自然的层态射：

$$f^*\Omega^1_{Y/S} \to \Omega^1_{X/S}$$

称为微分的拉回(pullback of differentials)。

(1) **(1st fundamental exact sequence)** 有正合列：

$$f^*\Omega^1_{Y/S} \to \Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0$$

(2) **(2nd fundamental exact sequence)** 如果上述$X \hookrightarrow Y$是闭浸入，其实这等价于$\Omega^1_{X/Y} = 0$，可以取出Y上的理想层$\mathcal{I}$，有正合列：

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to f^*\Omega^1_{Y/S} \to \Omega^1_{X/S} \to 0$$

定理 9.2 (Smoothness Criteria). k是代数闭域，X/k是有限型(个人认为需要加上不可约，或者后续都默认不可约概形)概形，那么：

$$X\text{在}k\text{上光滑} \Leftrightarrow X\text{在}k\text{上正则} \Leftrightarrow \forall x \in X, \Omega^1_{X/k}\text{局部自由且}\mathrm{rank}_x(\Omega^1_{X/k}) = \dim \mathcal{O}_{X,x}$$

特别地，当X是整概形时，还有$= \dim X$.

Proof. □

定理 9.3 (**Euler Sequence**). 存在$\mathbb{P}^n_k$上层正合列：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)^{\oplus(n+1)} \to (\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k/k})^\vee \to 0$$

再经过对偶可以得到另一个正合列：

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k/k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-1)^{\oplus(n+1)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \to 0$$

其中$\Omega^\vee$相当于是切空间，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)^{\oplus(n+1)} \to (\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k/k})^\vee$相当于是$x_i \to \frac{\partial}{\partial x_i}$.

例 9.1. 对$\mathbb{P}^1_k$，

$$\Omega^1_{\mathbb{P}^1_k/k} \simeq \mathcal{O}(-2)$$

其实这个-2可以理解成：对于$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = D_+(X_0) \cup D_+(X_1) = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[X_1/X_0] \cup \mathrm{Spec}\mathbb{C}[X_0/X_1]$，记$t = X_1/X_0$，$\Omega^1$限制在两个开集上的生成元粗略看成$dt$和$d(1/t) \sim -\frac{1}{t^2}dt$，这个$-2$由此而来。

例 9.2. X/k光滑，$\dim X = n$，记：

$$\omega_X := \bigwedge^{\dim X} \Omega^1_{X/k}$$

称为X上的典范线丛(canonical line bundle)。这个在微分几何和双有理几何会有用。

推论 9.1.

$$\omega^1_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}(-n-1)$$

这个命题可以用来推$\mathbb{P}^n$上的Serre对偶。

9.3　平坦

定义 9.2. $f : X \to Y$称为平坦的：如果对于任何$x \in X$，记$y = f(x)$，有$\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$是一个平坦的$\mathcal{O}_{Y,y}$-模。

例 9.3.

- $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$是平坦的。
- $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$不是平坦的。
- $\mathrm{Spec}k' \to \mathrm{Spec}k$是平坦的，其中$k'/k$是域扩张。

定理 9.4 (Field Base Change). 如果Spec$A' \to$ Spec$A$是平坦的，X是Noether概形以及$X \to$ Spec$A$，
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathrm{Spec}A' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & \mathrm{Spec}A \end{tikzcd}$$
(这里$X' = X \times_{\mathrm{Spec}A} \mathrm{Spec}A'$)，对任何$\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$，$h^*\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X')$，我们有：

$$H^i(X, \mathcal{F}) \otimes_A A' \simeq H^i(X', h^*\mathcal{F})$$

例 9.4. $X = \{X^n + Y^n = 1\} \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$，可以考虑$X_{\mathbb{C}}$，我们有：

$$H^i(X, -) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq H^i(X_{\mathbb{C}}, -)$$

这代表类似问题可以化到bbC(代数闭域)上考虑。

例 9.5.

$$H^0(X, -) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2 \not\simeq H^0(X_{\mathbb{F}_2}, -)$$

9.4 光滑态射($\to S$)

定义 9.3. $f : X \to S$是有限型态射，S是Noether概形，称f是光滑态射：如果：

- f是平坦态射。
- $\Omega^1_{X/S} \in \mathrm{Coh}(X)$局部自由
- 对任何$x \in X$，$s = f(x)$，$X_s/k(s)$光滑，即对任何域扩张$k'/k(s)$，$X_s \times_{k(s)} k'$正则。(其实就是纤维光滑)
- 对任何$x \in X$，$\mathrm{rank}_x(\Omega^1_{X/S}) = \dim_x f$.

其中rank_x表示$\Omega^1_{X/S,x}$作为有限生成$\mathcal{O}_{X,x}$-模的秩；$\dim_x$表示：对于$s = f(x)$，我们熟知$X_s := X \times_S k(s) \simeq f^{-1}(s)$，

$$\dim_x f := \dim \mathcal{O}_{X_s, x}$$

推论 9.2. (1) Smoothness is stable under composition.

(2) Smoothness is stable under base change.

9.5 étale态射以及一些例子

定义 9.4. $f: X \to S$称为étale态射：如果

- f是光滑的。
- f是拟有限的，即有限型+纤维有限，即$\forall s \in S$，$f^{-1}(s)$是有限集。

例 9.6. $U \hookrightarrow X$是有限型开浸入，那么这个嵌入是étale的。

例 9.7. $\mathbb{P}^1_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$是proper光滑的。

例 9.8. $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$在满足$2 \neq 0 \in k(\mathfrak{p})$的$\mathfrak{p}$处是有限光滑的，从而是étale的。在$\mathfrak{p} = (1 \pm \sqrt{-1})$处不是光滑的。

例 9.9. 对k'/k有限扩张，$\mathrm{Spec}k' \to \mathrm{Spec}k$光滑当且仅当$\Omega^1_{k'/k} = 0$当且仅当$k'/k$是可分扩张。因此对于$k = \mathbb{F}_p(t)$，$k' = \mathbb{F}_p(t^{1/p})$，这个扩张不可分，因此不光滑。

有限étale态射作为代数几何中“覆盖空间”的精确类比，是构建étale基本群这一普适理论的基石，而当此理论应用于最简单的概形（域）时，它便自然地还原为我们熟悉的伽罗瓦理论。这个理论对于计算一个数域的类数有用。

9.6 曲线

定义 9.5. k是域，$X \to \mathrm{Spec}k$有限型，称：

(1) X是一个曲线：如果
   - $\dim X = 1$.
   - X是约化的、可分的。

(2) X是一个光滑proper曲线：如果
   - $\dim X = 1$.
   - $X \to \mathrm{Spec}k$是光滑proper态射。(光滑蕴含约化，proper蕴含可分)

(3) X是一个平面曲线(plane curve)：如果$X \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k$是1维(个人认为应该加上约化)闭子概形。(闭浸入蕴含proper蕴含可分)

性质 9.2. 一个平面曲线如果还是整概形，那么一定可以写成$\{F(x, y, z) = 0\}$的形式。这应该是Krull's Principle Ideal Theorem的推论。

性质 9.3. k是代数闭域，X/k光滑，$Y \subseteq X$是闭不可约子概形，则Y/k光滑当且仅当：

- $\Omega^1_{Y/k}$局部自由.
- 2nd fundamental exact sequence还是左正合的，即有如下短正合列：

$$0 \to \mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2 \to f^*\Omega^1_{X/k}|_Y \to \Omega^1_{Y/k} \to 0$$

推论 9.3. $Y \subseteq X/k$条件同上，且拥有codim $= r$，即包含Y的不可约子概形链长度最大为r，如果Y/k光滑，那么：

$$\omega_Y \simeq \omega_X|_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \bigwedge^r N_{Y/X}$$

其中：

$$N_{Y/X} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2, \mathcal{O}_Y)$$

(称为Normal Bundle)。

应用：对于整平面曲线$C \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k$，codim $= 1$， C对应的多项式$\deg = d$，根据短正合列：

$$0 \to S \xrightarrow{\cdot F} S \to S/(F) \to 0$$

由于$\widetilde{(-)}$的正合性，得到层的短正合列：

$$0 \to \mathcal{I}_C \simeq \mathcal{O}(-d) \to \mathcal{O} \to i_*\mathcal{O}_C \to 0$$

其中$i : C \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k$是自然的嵌入。

利用上述推论：

$$\begin{aligned}\Omega^1_C &= \omega_C \\ &\simeq \omega_{\mathbb{P}^2_k}|_C \otimes (\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)^\vee \\ &\simeq \mathcal{O}(-3)|_C \otimes \mathcal{O}(d)|_C \\ &\simeq \mathcal{O}(d-3)|_C\end{aligned}$$

提供的那个正合列只是方便理解和作为正确推导的起点。它本身不能直接用来求$(\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)^\vee$。

最后：

$$\begin{aligned}\dim H^0(C,\Omega_C^1) &= \dim H^0(C,\mathcal{O}(d-3)) \\ &= \dim H^0(\mathbb{P}_k^2,\mathcal{O}(d-3)) \\ &= \frac{(d-2)(d-1)}{2} = g_C = \dim H^1(C,\mathcal{O}_C)\end{aligned}$$

最后是之前就算过的。自此大致结束了**定理7.1**的证明。

10 2025.8.18

10.1 一些回顾

若未加说明，默认$k=\mathbb{C}$。

性质 10.1. C/k是一条光滑proper曲线，

(1) **(Topology)** C整当且仅当C不可约当且仅当C连通。

(2) **(Proper)** 对任何$\mathcal{F}\in\mathrm{Coh(C)}$和$i\in\mathbb{N}$，$\dim H^i(C,\mathcal{F})<+\infty$。

(3) **(Smooth)** $\Omega^1_{C/k}$是一个线丛。

例 10.1. $k=\mathbb{C}$，当C是光滑proper整曲线时：

$$H^0(C,\mathcal{O}_C)=\mathbb{C}$$

这里简单回顾一下：$X=\mathrm{Spec}A$时熟知：

$$\begin{gathered}\mathrm{QCoh}(X)\simeq\mathrm{Mod}_A\\ \widetilde{M}\leftarrow\!\shortmid M\end{gathered}$$

$\widetilde{M}$是局部自由层当且仅当M是局部自由模，$\widetilde{M}$ 是线丛当且仅当M是局部自由模且对任何$\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}A$，有$M_{\mathfrak{p}}\simeq A_{\mathfrak{p}}$作为$A_{\mathfrak{p}}$-模同构。

$\mathrm{Pic}(X):=\{X\text{上的线丛}\}/\sim$，是一个群，乘法由$-\otimes_{\mathcal{O}_X}-$来，逆由$\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}^\vee:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)$来。

$\Omega^1_{C/k}$称为典范线丛(canonical line bundle)。

例 10.2. 对于一个数域K，考虑$X=\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K$，$I\subseteq K$是一个分式理想，则$\widetilde{I}\in\mathrm{Pic}(X)$，并且有：

$$\mathrm{Pic}(X)\simeq\mathrm{Cl}(K)$$

回顾一下以下定理，之前提及过：

定理 10.1. (1) 以下两个范畴等价：

- 光滑proper连通$\mathbb{C}$上曲线，其中连通等价于整
- $\{K | \exists t \in K - \mathbb{C} \quad \text{s.t. } K/\mathbb{C}(t)\text{是有限扩张}\}$

并且由$C \mapsto k(C)$给出，$k(C)$是函数域(C是整曲线，因此合理)。

(2)

$$g_C = \dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C) = \dim_k H^0(C, \Omega^1_C)$$

(3) $f : C_1 \to C_2$是非常值态射，那么有短正合列：

$$0 \to f^*\Omega^1_{C_2/k} \to \Omega^1_{C_1/k} \to \Omega^1_{C_1/C_2} \to 0$$

(4) 对任何$\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(C)$局部自由，自然有$\mathcal{F}^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_C)$，有：

$$H^0(C, \mathcal{F}) \simeq H^1(C, \mathcal{F}^\vee \otimes \Omega^1_{C/k})^*$$

Proof. □

推论 10.1. 记号同上，有：

$$g_{C_1} \geqslant g_{C_2}$$

不可能由亏格小的态射到亏格大的。更精确的结论是Hurwitz公式，需要用到divisor，会和Ω_{C_1/C_2}有关。

例 10.3.

$$\Omega^1_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}} \simeq \mathcal{O}(-2)$$

之前提过，不再重述。这是一个很重要的例子，要会算。
同时再重申一下Serre对偶：

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) \simeq H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-n-2))^*$$

例 10.4. $\{X^2 + Y^2 - Z^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 是一个光滑proper的整曲线。

Proof. 闭嵌入是proper的，对应素理想可知不可约，光滑性看切空间，限制在那个熟知的仿射开集 $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$上是知道怎么具体算切空间以及维数的，只要说处处切空间维数为1即可。这是容易的。 □

定理 10.2. 对于一个平面曲线(plane curve)C，对应的多项式deg $= d$，则

$$g_C = \frac{(d-2)(d-1)}{2}$$

因此并不是所有整数都存在相对应的平面曲线使得亏格是这个数。

定理 10.3. (1) $g_C = 0$可以推出$C \simeq \mathbb{P}^1$。

(2) 对任何$g \geqslant 1$，存在无穷多条曲线$C/\mathbb{C}$使得$g_C = g$。这里曲线指的是光滑proper曲线，不一定嵌入在$\mathbb{P}^2$中。

(3) 对于光滑proper曲线C，一定存在闭浸入：$C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$.

注：对于光滑曲线C_0，我们有结论：存在光滑proper曲线C，以及$C_0 \hookrightarrow C$开浸入，因此对光滑曲线的研究可以直接提升为对光滑proper曲线的研究。

介绍以下代数曲线研究中的一个重要转变：

- 旧方法：通过将曲线嵌入到射影空间中来研究，依赖于外在的代数方程。
- 新方法：通过研究其内在的性质，特别是其线丛和 Picard 群的结构。具体来说，可以构造$C \to \mathrm{Pic}(C) : p \mapsto \mathcal{O}(p)$，称为Abel-Jacobi映射，且这个映射在$g_C \geqslant 1$时是单射。其中$\mathcal{O}(p)$是$p - p_0$作为除子对应的度数为0的线丛。

这是一种更抽象、更内在的研究方法。它不再把曲线看作是某个射影空间中的一个子集，而是从曲线本身的内在几何来研究其性质，通过分析其上的线丛和除子做到的。

定理 10.4 (Riemann). (就是上述旧方法)k是任何一个域，一定存在有限态射$f : C \to \mathbb{P}^1$。

Proof. 用赋值判别可以说f是proper的，自然就是有限的。 □

10.2 除子

定义 10.1. p是C上任何一个闭点，$\mathcal{O}_{C,p}$我们知道是DVR，并且$\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{C,p}) = k(C)$(这是整概形的性质)，对$f \in k(C)$，记vanishing order of f at p为：

$$\mathrm{val}_p(f) := \max\{m \in \mathbb{Z} | f \in \mathfrak{m}_{C,p}^m \mathcal{O}_{C,p}\}$$

例 10.5. 熟知$\mathbb{C}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(T)$，有：

$$\mathrm{val}_p(T) = \begin{cases} 0 & p \neq 0, \infty \\ 1 & p = 0 \\ -1 & p = \infty \end{cases}$$

定义 10.2. C上的一个(Weil)除子是一个形式为$\sum n_p[p]$的有限和，其中p是C上的闭点，$n_p \in \mathbb{Z}$。对于$0 \neq f \in k(C)$，记主除子为$\mathrm{div}(f) = \sum \mathrm{val}_p(f)[p]$。记

$$\mathrm{Div}(C) = \left\{\sum n_p[p] \mid n_p \in \mathbb{Z}, \text{只有有限个非}0, p \in C\text{是闭点}\right\} \simeq \bigoplus_{p\text{是闭点}} \mathbb{Z}$$

记

$$\deg : \mathrm{Div}(C) \to \mathbb{Z} : \sum n_p[p] \mapsto \sum n_p$$

记(Weil)类群为

$$\mathrm{Cl}(C) = \mathrm{Div}(C)/\mathrm{Prin}(C)$$

其中$\mathrm{Prin}(C)$是所有主除子的集合。

定理 10.5.

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = 0 \quad \forall f \in k(C)$$

10.3 除子的拉回

定义 10.3. $f : C_1 \to C_2$非常值有限态射，自然诱导$k(C_2) \to k(C_1)$有限域扩张，对于任意$x \in C_1$，记$y = f(x) \in C_2$，诱导：

$$f_x^{\#} : \mathcal{O}_{C_2,y} \to \mathcal{O}_{C_1,x}$$

简记$f^{\#}(\mathfrak{m}_y)$是生成的$\mathcal{O}_{C_1,x}$的理想，则一定存在$e_x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$使得：

$$f^{\#}(\mathfrak{m}_y) = \mathfrak{m}_x^{e_x}$$

称为分歧指数。对于除子$D \in \mathrm{Div}(C_2)$，我们记除子的拉回f^*D

$$f^*D := \sum_{p \in C_1} e_p n_{f(p)}[p]$$

定理 10.6.

$$\deg f^*D = \deg D \cdot \deg f$$

其中$\deg f = [k(C_1) : k(C_2)]$扩张次数。

11 2025.8.20

11.1 Riemann-Roch定理

定理 11.1. 对任何$\mathbb{C}$上光滑proper整曲线C，存在自然同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}(C) &\simeq \mathrm{Pic}(C)\\ D &\mapsto \mathcal{O}(D)\end{aligned}$$

定理 11.2. (1) $f: C_1 \to C_2$非常值态射，则有：

$$\mathcal{O}(f^*D) = f^*\mathcal{O}(D)$$

(2)

$$H^0(C, \mathcal{O}(D)) \simeq \{f \in k(C) | \mathrm{div}(f) + D \geqslant 0\}$$

(3) 存在典范除子(canonical divisor)$K \in \mathrm{Cl}(C)$使得$\mathcal{O}(K) = \Omega^1_C$。

(4) **(Riemann-Roch)**

$$l(D) := \dim H^0(C, \mathcal{O}(D))$$

则有：

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

Proof. □

例 11.1.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1) &\simeq \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)\\ n \cdot [\infty] &\mapsto \mathcal{O}(n)\end{aligned}$$

例 11.2. $D = 0$，对应$l(0) = 1$，同时结合

$$l(K) = \dim_k H^0(C, \Omega^1_C) = g$$

可知：

$$\deg K = 2g - 2$$

推论 11.1. 如果$\deg(K-D)<0$，即$\deg D>2g-2$，那么：

$$l(D)=\deg D+(1-g)$$

Proof. 由条件，对任何$f\neq 0\in k(C)$都有$\deg(\mathrm{div}f+(K-D))<0$，故$l(K-D)=0$，故由R-R等式成立。 □

例 11.3. $g=1$时，$\deg D>0$即可推出$l(D)=\deg D$.

例 11.4. 对于一个数域K，考虑$X=\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K$，$I\subseteq K$是一个分式理想，则$\widetilde{I}\in\mathrm{Pic}(X)$，并且有：

$$\mathrm{Pic}(X)\simeq \mathrm{Cl}(K)$$

11.2 Abel-Jacobi Map

定义 11.1. k是域，C/k光滑proper几何整(即$C_{\overline{k}}$整)曲线，可以构造Abel-Jacobi映射：

$$\begin{aligned}\mathrm{AJ}^1: C(k)&\to \mathrm{Pic}(C)\\ p&\mapsto \mathcal{O}(p)\end{aligned}$$

定理 11.3. 固定$O\in C(k)$，定义

$$\begin{aligned}\mathrm{AJ}: C(k)&\to \mathrm{Pic}^O(C)\\ p&\mapsto \mathcal{O}(O-p)\end{aligned}$$

AJ在$C\not\simeq\mathbb{P}^1_k$时是单射。

Proof. □

推论 11.2. 如果$g_C\geqslant 1$，则AJ是单射。

例 11.5 (Mordell-Weil Theorem). $k=\mathbb{Q}$时，有：

$$\mathrm{Pic}^O(C)\simeq(\mathbb{Z}^{\oplus r})\oplus(\text{有限群})$$

是一个有限生成Abel群。

例 11.6 (重要例子). $C=\{X^3+Y^3+Z^3=0\}\subseteq\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$，由$\deg F=3$推出$g_C=\frac{(3-1)(3-2)}{2}=1$，我们之前说过$\Omega^1_C=\mathcal{O}_C$(**推论9.3后面的应用**)，而根据R-R的应用$\deg K=2g-2=0$，这两个结果是兼容的。
R-R还告诉我们，对于任何C上的除子D：

$$\dim_{\mathbb{C}}\{f\in\mathbb{C}(C)|\mathrm{div}f+D\geqslant 0\}=l(D)=\deg D$$

定理 11.4. $g_C=1$时，AJ是同构。

推论 11.3. $g_C=1$时， $C(k)$上存在一个群结构，使得AJ形成：

$$(C(k),\oplus)\simeq(\mathrm{Pic}^O(C),\otimes):O\mapsto\mathcal{O}_C$$

是群同构。
更具体地，对任何$P_1,P_2\in C(k)$，存在$P_3\in C(k)$，使得：

$$\mathcal{O}(P_1-O)\otimes\mathcal{O}(P_2-O)\simeq\mathcal{O}(O-P_3)$$

进而存在$f\in k(C)$使得$\mathrm{div}f=P_1+P_2+P_3-3O$.

直观上，$k=\mathbb{C}$，C同上，存在直线$l\subseteq\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 使得$l\cup C=\{P_1,P_2,P_3\}$，记$l:aX+bY+cZ=0$。在O处有切空间$T_O:a_0X+b_0Y+c_0Z=0$，那么除子$P_1+P_2+P_3-3O$对应的$f\in\mathbb{C}(C)$可以选取为：

$$f(X,Y,Z):=\frac{aX+bY+cZ}{a_0X+b_0Y+c_0Z}$$

11.3 群概形、椭圆曲线

定义 11.2. S概形，群概形(group scheme)$G\to S$由信息(G,m,i,e)组成，其中：

- $e:S\to G$概形态射使得$(S\to G\to S)$是恒等态射。
- $m:G\times_S G\to G$看成multiplication
- $i:G\to G$是inverse
- 满足结合律，其实就是一张交换图得到$G\times_S G\times_S G\to G$。

定理 11.5. 对任何C/k光滑proper几何整曲线，选取$O \in C(k)$，$g_C \geqslant 1$，那么存在唯一的群概形$\mathrm{Jac}(C)/k$，并伴有：

- $\mathrm{AJ} : C \hookrightarrow \mathrm{Jac}(C)$闭浸入。
- $\mathrm{Jac}(C)/k$是光滑proper连通概形。
- 对于闭点，其实是$C(k) \to \mathrm{Pic}^O(C)(k) : O \mapsto \mathcal{O}_C$

例 11.7. $g_C = 1$，有$C \simeq \mathrm{Jac}(C)$，从而C上存在群概形结构。

定义 11.3. A/k称为Abel簇：如果$A \to \mathrm{Spec}k$是一个光滑proper连通群概形。若还有$\dim A = 1$，则称为椭圆曲线。

12 2025.8.22

12.1 代数群

例 12.1. $\mathrm{GL}_n(k)$可以作为一个k上的群概形。$m:\mathrm{GL}_n(k)\times\mathrm{GL}_n(k)\to\mathrm{GL}_n(k)$由矩阵相乘给出， $i:\mathrm{GL}_n(k)\to\mathrm{GL}_n(k)$是取逆矩阵， $e:\mathrm{Spec}k\to\mathrm{GL}_n(k)$是单位矩阵的对应态射。

定义 12.1. k上的一个代数群(algebraic group)G是一个光滑的k上群概形，使得存在闭嵌入$G\hookrightarrow\mathrm{GL}_n(k)$.

定义 12.2. G是k上的一个代数群，一个G的代数表示(algebraic representation)是一个概形态射$\rho:G\to\mathrm{GL}(V)$，其中V是一个k-有限维向量空间。

注：R是环，G是一个群概形，那么$G(R)$是一个群。

12.2 特征曲线

注：存在一个典范态射：

$$\mathrm{GL}_{n+1}(k)\times_k\mathbb{P}^n_k\to\mathbb{P}^n_k$$

定义 12.3. $A\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$， $C\subseteq\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$是一个平面曲线，它是$A$的一条特征曲线：如果$A$诱导$C\to C$态射。

例 12.2. $C=\{X^3+Y^3+Z^3=0\}$是$A:[x,y,z]\mapsto[y,z,x]$的一条特征曲线。

定理 12.1 (Hurwitz)**.** C是$\mathbb{C}$上光滑proper曲线，那么$\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(C):=\{f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C,C)$同构$\}$是有限群，并且当$g_C\geqslant 2$时，有：

$$\#\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(C)\leqslant 84(g_C-1)$$

Proof. 用Ω^1. □