速通 TATE THESIS 笔记

Ridongen
2025 中科院北大代数与数论暑期学校提高班
2025.8.4-2025.8.22

Contents

1 前言

这份 Latex 笔记是笔者为了巩固日常上课内容而产生的副产物，比较适合复习回顾使用。对于未上过暑期学校且不了解相关内容的读者，首先需要一些前置知识，然后这个 Lecture Note 可以作为一个对 Tate Thesis 的快速参考。

这里会预留一些 proof 的空白，代表课上讲过相关证明，为了减少编辑笔记的时间就略过了。同时，即使附上了证明也只是大致思路，细节并不是这短短六个星期能够完全理解的。

参考资料是一份内部资料，无法外传，请多多包涵。

2 2025.8.4

2.1 Adeles 和 Ideles 上的不变测度

在上一阶段的暑校课程中已经学过 Adeles 和 Ideles，简单回顾：对于数域 $F/\mathbb{Q}$，

$$\mathbb{A}_F := \left\{(x_v) \in F_v | 对几乎所有 v \nmid \infty, 有 x_v \in \mathcal{O}_{F_v}\right\}$$
$$\mathbb{A}_F^\times := \left\{(x_v) \in F_v^\times | 对几乎所有 v \nmid \infty, 有 x_v \in \mathcal{O}_{F_v}^\times\right\}$$

定义 2.1. $(X, d\mu)$ 为测度空间，U 为可测集，记 $\mathrm{vol}(U, d\mu) := \int 1_U d\mu$。进一步，若 X 为拓扑群，称 $d\mu$ 是左 (resp. 右) 不变的：若 $\forall g \in X$ 和可测集 U，有 $\mathrm{vol}(gU, d\mu) = \mathrm{vol}(U, d\mu)$(resp. $\mathrm{vol}(Ug, d\mu) = \mathrm{vol}(U, d\mu)$)。

例 2.1. 以下均为测度空间的左 (右) 不变测度：

(1) $(\mathbb{R}, dx)$.

(2) $(\mathbb{C}, dxdy = \frac{i}{2}dzd\bar{z})$.

(3) $(\mathbb{R}^\times, \frac{dx}{|x|})$.

(4) $(\mathbb{C}^\times, \frac{idzd\bar{z}}{|z||\bar{z}|} = \frac{2dxdy}{|z|^2}) = \frac{2drd\theta}{r}$.

定义 2.2. 若称 $F/\mathbb{Q}_p$ 有限，则蕴含：

(1) $\mathcal{O}_F$ 是完备的 DVR。

(2) $\mathcal{O}_F/(\pi)$ 是 $\mathbb{F}_p$ 的有限扩张。

记 $\mathcal{O}_F/(\pi)$ 是 $\mathbb{F}_q$，则对 $x = u\pi^n \in F, u \in \mathcal{O}_F^\times$，有 $|x|_F := q^{-n}$.

定理 2.1. Up to a scalar，在 F 上存在唯一的测度 $d\mu$，使得对于任何 F 中开集 U，有

$$\mathrm{vol}(U, d\mu) = \mathrm{vol}(a + U, d\mu) \quad \forall a \in F$$

定理 2.2 (Haar). G 是一个局部紧的拓扑群，那么 up to a scalar，存在唯一的左不变测度 $d_L\mu$。

事实上，当 G 为紧李群或者 reductive group 时，$d_L\mu = d_R\mu$。

例 2.2. $F = \mathbb{Q}_p$，有一组拓扑基 $\left\{U_{a,n} := a + p^n\mathbb{Z}_p\right\}_{a \in \mathbb{Q}_p, n \in \mathbb{Z}}$，取 $\mathrm{vol}(U_{a,n}, d\mu) = p^{-n}$，可以验证 $d\mu$ 可形成一个不变测度，同时特别地 $\mathrm{vol}(\mathbb{Z}_p, d\mu) = 1$.

性质 2.1. 若 $d\mu$ 为 F 上的不变测度，那么对于 F 中任何一个可测集 U，任何 $a \in F^\times$，

$$\mathrm{vol}(aU, d\mu) = |a|_F \mathrm{vol}(U, d\mu)$$

Proof. □

例 2.3. 在 $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_F, d\mu) = 1$ 时可以推出 $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_F^\times, d\mu) = \frac{q-1}{q}$.

推论 2.1. 若 $d\mu$ 是 F 上的不变测度，那么 $\frac{d\mu}{|x|}$ 是 $F^\times$ 上的不变测度。

Proof. □

定理 2.3 (Tate). 存在 $\mathbb{A}_F(\mathrm{resp.}\mathbb{A}_F^\times)$ 上的不变测度。更精确地：

(1) 对于 Adeles $\mathbb{A}_F$，它的邻域基都具有形式：

$$U = \prod_v U_v \quad \text{其中} U_v \subseteq F_v \text{都是紧开集，且对于几乎所有} v \nmid \infty \text{都有} U_v = \mathcal{O}_{F_v}$$

有：

$$\mathrm{vol}(U, d\mu) = \prod_v \mathrm{vol}(U_v, d\mu_v)$$

其中对 $v \nmid \infty$，$d\mu_v$ 是 F_v 上的不变测度，并且使得 $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_{F_v}, d\mu_v) = 1$。

(2) 对于 Ideles $\mathbb{A}_F^\times$，它的邻域基都具有形式：

$$U = \prod_v U_v \quad \text{其中} U_v \subseteq F_v^\times \text{都是紧开集，且对于几乎所有} v \nmid \infty \text{都有} U_v = \mathcal{O}_{F_v}^\times$$

有：

$$\mathrm{vol}(U, d\mu^\times) = \prod_v \mathrm{vol}(U_v, d\mu_v^\times)$$

其中对 $v \nmid \infty$，$d\mu_v$ 是 $F_v^\times$ 上的不变测度，并且使得 $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_{F_v}^\times, d\mu_v^\times) = 1$。

2.2 积分

定义 2.3. 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的速降函数全体如下：

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \middle| \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall n \text{元多项式} p, \lim_{|x| \to \infty} \partial^\alpha f \cdot p = 0 \right\}$$

例 2.4. (1) $e^{-\pi x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(2) 对 $\mathbb{R}^n$ 中任何一个紧集 K，U 是包含 K 的有界开集，熟知存在 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $f|_K \equiv 1, f|_{U^c} \equiv 0$，那么 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

性质 2.2. $F/\mathbb{Q}_p$ 有限，记 $LC(F)$ 是 F 上局部常值函数全体（F 是完全不连通的），有:

$$\mathcal{S}(F) = LC(F)\text{且由紧支撑集} = \left\{ f = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot 1_{U_i} | U_i \subseteq F\text{紧开集}, c_i \in F \right\}$$

例 2.5. 对于非分歧特征 $\chi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$，即使得 $\mathcal{O}_F^\times \subseteq \ker \chi$ 的特征 χ，我们当然能发现 uniformizerπ，χ 完全由 $\chi(\pi)$ 决定。
对 $s \in \mathbb{C}$ 有如下等式:

$$\int_{F^\times} 1_{\mathcal{O}_F}(x)\chi(x)|x|^s d\mu^\times = (1 - \chi(\pi)q^{-s})^{-1}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\int_{F^\times} 1_{\mathcal{O}_F}(x)\chi(x)|x|^s d\mu^\times &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\pi^n \mathcal{O}_F^\times} \chi(x)|x|^s d\mu^\times \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi(\pi)^n |\pi|^{ns} \mathrm{vol}(\pi^n \mathcal{O}_F^\times, d\mu^\times) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi(\pi)^n q^{-ns} \cdot 1 \\
&= (1 - \chi(\pi)q^{-s})^{-1}
\end{aligned}$$

□

如果我们代入 F 是数域 K 在素数 p 上素理想 $\mathfrak{p}$ 的完备化，那么对应 $q = N\mathfrak{p}$，上述得到的就是 Dirichlet-L 函数 $L(s, \chi)$ 的乘积表示中对应 $\mathfrak{p}$ 的那一项。

3 2025.8.6

性质 3.1.

$$\mathcal{S}(\mathbb{A}_F)=\left\{f=(f_v)_v|f_v\in\mathcal{S}(F_v),\text{且对几乎所有}v\nmid\infty,\text{有}f_v=1_{\mathcal{O}_{F_v}}\right\}$$

其中 $\forall x=(x_v)_v\in\mathbb{A}_F$，$f(x):=\prod_v f_v(x_v)$，

$$\int_{\mathbb{A}_F}f(x)dx:=\prod_v\int_{F_v}f_v(x_v)dx_v$$
$$\int_{\mathbb{A}_F^\times}f(x)d^\times x:=\prod_v\int_{F_v^\times}f_v(x_v)d^\times x_v$$

注：之后取测度 $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_{F_v},dx_v)=(N\mathfrak{D}_v)^{-1/2}$，其中 $\mathfrak{D}$ 是由有限扩张 $F/\mathbb{Q}_p$ 所定义的差分理想。

3.1 计算基本区域 $\mathbb{A}_F/F$ 和 $\mathbb{A}_F^{\times,1}/F^\times$ 的体积

定理 3.1. $\mathrm{vol}(\mathbb{A}_F/F,dx)=1$.

Proof. $\prod_{v|\infty}F_v\simeq F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\simeq\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}$，$\Lambda_F:=F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}/\mathcal{O}_F$ 的基本区域，$\Omega_F:=\mathbb{A}_F/F$ 的基本区域，利用：

$$\Omega_F\simeq\prod_{v\nmid\infty}\mathcal{O}_{F_v}\times\Lambda_F$$

以及：

$$N\mathfrak{D}=\prod_{v\nmid\infty}N\mathfrak{D}_v$$

有：

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\mathbb{A}_F/F,dx)&=\mathrm{vol}(\Omega_F,dx)\\&=\prod_{v\nmid\infty}\mathrm{vol}(\mathcal{O}_{F_v},dx_v)\cdot\mathrm{vol}(\Lambda_F,\prod_{v|\infty}dx_v)\\&=\prod_{v\nmid\infty}(N\mathfrak{D}_v)^{-1/2}\cdot\sqrt{|\mathrm{disc}\ F|}\\&=1\end{aligned}$$

□

注：涉及到基本区域之间的同构的时候，是需要注意测度的兼容性的。
我们注意到一个想法：如果已经知道了 $\mathbb{R}^{d+1}$ 和 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度，那么可以诱导出 $\mathbb{R}^d$ 上的

Lebesgue 测度如下：

$$\mathrm{vol}(U, dx_1 \cdots dx_d) := \mathrm{vol}(U \times [0,1], dx_1 \cdots dx_d dx_{d+1})$$

那么对于 $\mathbb{A}_F^{\times,1}$ 上的测度构造，我们注意到

$$\mathbb{A}_F^\times \simeq \mathbb{A}_F^{\times,1} \times \mathbb{R}^+$$

其中 $\mathbb{R}^+$ 上取不变测度 $\frac{dx}{x}$，则对于 $\mathbb{A}_F^{\times,1}$ 上可测集 U，考虑：

$$\overline{U} := \left\{(y_v)_v \in \mathbb{A}_F^\times | y_v = x_v\ (v \neq u);\ y_u = tx_u\ t \in [1,e]\right\}$$

这可以简单粗暴地理解成 $U \times I$，那么

$$\mathrm{vol}(U) := \mathrm{vol}(\overline{U})$$

其中左边是 $\mathbb{A}_F^{\times,1}$ 上的测度，右边是 $\mathbb{A}_F^\times$ 上的测度。

练习：求 $U := \prod_p \mathbb{Z}_p^\times \subseteq \mathbb{A}_\mathbb{Q}^{\times,1}$ 的体积。

定理 3.2.

$$\Sigma_F := \mathbb{A}_F^{\times,1}/F^\times \text{的基本区域}$$

$$\mathrm{vol}(\Sigma_F) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} h_F R_F}{\omega_F}$$

Proof. 利用：

$$\begin{aligned}\eta : \mathbb{A}_F^{\times,1}/F^\times &\longrightarrow \mathrm{Cl}(F) \\ (x_v)_v &\mapsto \prod_{v \nmid \infty} \mathfrak{p}_v^{v_{\mathfrak{p}_v}(x_v)}\end{aligned}$$

将 $\mathbb{A}_F^{\times,1}/F^\times$ 分成 h_F 块，每一块体积为 vol(kernel)，其中：

$$\ker\eta = \left(\prod_{v\nmid\infty} \mathcal{O}_{F_v}^\times \times \left(\prod_{v|\infty} F_v^\times\right)^1\right)/\mathcal{O}_F^\times$$

其中：

$$\left(\prod_{v|\infty} F_v^\times\right)^1 := \left\{(x_v) \in \prod_{v|\infty} F_v^\times \middle| \prod_{v|\infty} |x_v|_v = 1\right\}$$

记

$$\Omega_F := \left(\prod_{v\mid\infty} F_v^\times\right)^1 /\mathcal{O}_F^\times\text{的基本区域}$$

记:

$$\Omega_F^1 := \left(\prod_{v\mid\infty} F_v^\times\right)^1 /U_F\text{的基本区域}$$

利用 Dirichlet 单位定理 $\mathcal{O}_F^\times \simeq W_F \times U_F$,$\Omega_F^1$ 可以拆成 ω_F 块,每一块的体积为 $\mathrm{vol}(\Omega_F)$。

再利用:

$$\left(\prod_{v\mid\infty} F_v^\times\right)^1 \simeq \big((\mathbb{R}^\times)^{r_1} \times (\mathbb{C}^\times)^{r_2}\big)^1 \simeq \{\pm 1\}^{r_1} \times (S^1)^{r_2} \times ((\mathbb{R}^+)^{r_1+r_2})^1$$

并且熟知:

$$\begin{aligned} U_F &\longrightarrow ((\mathbb{R}^+)^{r_1+r_2})^1 \\ x &\mapsto (|\sigma_i(x)|)_{i=1}^{r_1+r_2} \end{aligned}$$

并且它所代表的基本区域 $\overline{\Omega_F^1} := ((\mathbb{R}^+)^{r_1+r_2})^1/U_F$ 满足:

$$\mathrm{vol}(\overline{\Omega_F^1}) = R_F$$

综上:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\Sigma_F) &= h_F \cdot \mathrm{vol}(\ker\eta) \\ &= h_F \cdot \prod_{v\nmid\infty} \mathrm{vol}(\mathcal{O}_{F_v}^\times, dx_v^\times) \cdot \mathrm{vol}(\Omega_F) \\ &= h_F \cdot \omega_F^{-1} \cdot \mathrm{vol}(\Omega_F^1) \\ &= h_F \cdot \omega_F^{-1} \cdot 2^{r_1} \cdot (2\pi)^{r_2} \cdot \mathrm{vol}(\overline{\Omega_F^1}) \\ &= \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} h_F R_F}{\omega_F} \end{aligned}$$

□

3.2 加法特征

定义 3.1. 对 $F=\mathbb{R}$，定义加法特征：

$$\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^\times: x\mapsto e^{-2\pi\sqrt{-1}x}$$

对 $F=\mathbb{Q}_p$，定义加法特征：

$$\psi:\mathbb{Q}_p\to\mathbb{C}^\times: x\mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}\{x\}}$$

其中对 $x=a_{-n}p^{-n}+\ldots\in\mathbb{Q}_p$，$a_i\in[0,p-1]$：

$$\{x\}:=a_{-1}p^{-1}+a_{-2}p^{-2}+\ldots+a_{-n}p^{-n}$$

定义 3.2. 对 K/F 有限扩张，定义 ψ_K：

$$\psi_K(x)=\psi_F(\mathrm{Tr}_{K/F}(x))$$

显然 ψ_K 是 K 上的加法特征。

定义 3.3. $\psi':F\to\mathbb{C}^\times$，称为 F 上的加法特征：如果 ψ' 是一个连续群同态，并且 $\mathrm{Im}\ \psi'\subseteq S^1$.

性质 3.2. $F/\mathbb{Q}_p$ 是有限扩张，则对一般的加法特征 ψ'，存在 $N\in\mathbb{Z}$ 使得 $\psi'|_{\pi^N\mathcal{O}_F}\equiv 1$，这个最小的 N，以及对应的 $\pi^N\mathcal{O}_F$ 我们都称为 ψ' 的导子 (conductor).

Proof. 由 ψ' 的连续性，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得：

$$\psi'(\pi^N\mathcal{O}_F)\subseteq\{z\in S^1||z-1|<\varepsilon\}$$

取 ε 足够小，假设存在 $y\in\pi^N\mathcal{O}_F$ 使得 $\psi'(y)\neq 1$，那么存在 $n\in\mathbb{N}^*$ 使得 $\psi'(ny)\notin\{z\in S^1||z-1|<\varepsilon\}$，矛盾。 □

性质 3.3. ψ_F 的导子为 $\mathfrak{D}_F^{-1}$.

Proof. $\pi^d\mathcal{O}_F:=\mathfrak{D}_F^{-1}\subseteq\pi^N\mathcal{O}_F$ 是容易的，因为 $\psi|_{\mathfrak{D}_F^{-1}}\equiv 1$。假设 $\pi^{d-1}\mathcal{O}_F\subseteq\pi^N\mathcal{O}_F$，一方面存在 $u\in\mathcal{O}_F^\times,y\in\mathcal{O}_F$ 使得 $\mathrm{Tr}(\pi^{d-1}uy)\notin\mathbb{Z}_p$，从而 $\psi(\pi^{d-1}uy)\neq 1$，另一方面由导子性质 $\psi(\pi^{d-1}uy)=1$，矛盾。故 $d=N$。 □

4 2025.8.8

4.1 $\mathcal{S}(F)$ 上的 Fourier 变换

定义 4.1. F 是局部域，$\forall f \in \mathcal{S}(F)$，

$$\mathcal{F}_\psi(f) = \widehat{f} : y \mapsto \int_F f(x)\psi(xy)dx$$

称 $\widehat{f}$ 是 f 的 Fourier 变换。

例 4.1. (1) $F = \mathbb{R}$，$f(x) = e^{\pi x^2}$，$\widehat{f} = f$.

(2) $F = \mathbb{C}$，$f(z) = e^{-2\pi z\overline{z}}$，$\widehat{f} = f$.

推论 4.1. $\psi' : F \to \mathbb{C}^\times$ 且 $\psi' \neq 1$，$N = \mathrm{Cond}(\psi')$，那么对任何 $r \in \mathbb{N}^*$，

$$\int_{\pi^{-r+N}\mathcal{O}_F} \psi'(x)dx = 0$$

Proof. □

推论 4.2. $\forall r \in \mathbb{N}^*$，

$$\int_{\pi^{-r}\mathfrak{D}_F^{-1}} \psi_F(x)dx = 0$$

定理 4.1.

$$1_{\widehat{a+\pi^n\mathcal{O}_F}}(y) = |\pi|^n \cdot N\mathfrak{D}_F^{-1/2} \cdot \psi(ay) \cdot 1_{\pi^{-n}\mathfrak{D}_F^{-1}}(y)$$

Proof. □

结合 $\mathcal{S}(F) = LC(F)$with compact support，我们可以得到：

推论 4.3. $\forall f \in \mathcal{S}(F)$，$\widehat{f} \in \mathcal{S}(F)$. 当然，这个结论对 $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 也成立。

定理 4.2. $\forall f \in \mathcal{S}(F)$，

$$\widehat{\widehat{f}}(y) = f(-y)$$

Proof. □

推论 4.4.

$$\widehat{1_{\mathcal{O}_F}} = N\mathfrak{D}_F^{-1/2} \cdot 1_{\mathfrak{D}_F^{-1}}$$

特别地：对 $K_v/\mathcal{Q}_p$，且 $v \mid p$ 非分歧，即 $\mathfrak{D}_v = \mathcal{O}_{K_v}$，有:

$$\widehat{1_{\mathcal{O}_{K_v}}} = 1_{\mathcal{O}_{K_v}}$$

4.2 $\mathbb{A}_F$ 上的 Fourier 变换

性质 4.1. 定义:

$$\psi = \otimes_v \psi_v : \mathbb{A}_F \to \mathbb{C}^\times : (x_v) \mapsto \prod_v \psi_v(x_v)$$

那么 ψ 是良定义的，即对于任意 $(x_v) \in \mathbb{A}_F$，对几乎所有 v，$\psi_v(x_v) = 1$。从而上述 ψ 成为 $\mathbb{A}_F$ 上的加法特征。

定义 4.2. 对于 $f = \otimes_v f_v \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$，定义 Fourier 变换:

$$\mathcal{F}_\psi(f) = \widehat{f} := \otimes_v \widehat{f}_v : (x_v) \mapsto \prod_v \widehat{f}_v(x_v)$$

性质 4.2. $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$。

Proof. □

定理 4.3. $\forall x \in F$，$\psi(x) = 1$.

Proof. □

5 2025.8.11

5.1 Poisson Summation Formula

定理 5.1 (Poisson Summation Formula). 对于 $f \in \mathcal{S}(F)$，有：

$$\sum_{x \in F} f(x) = \sum_{y \in F} \widehat{f}(y)$$

例 5.1. $F = \mathbb{Q}$，考虑：

$$f := \bigotimes_p 1_{\mathbb{Z}_p} \otimes f_\infty \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$$

其中 $f_\infty \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. 注意到 $a \in \mathbb{Z}_p$ 对任意 p 成立当且仅当 $a \in \mathbb{Z}$，因此可以算出 PSF 在此时就是 Classical PSF。

例 5.2. $F = \mathbb{Q}$，取 $N = p_1^{e_1} \dots p_s^{e_s} \in \mathbb{N}^*$，考虑：

$$f := \bigotimes_p f_p \otimes f_\infty$$

其中：

$$f_\infty(x) := e^{-\pi x^2}$$

$$f_p := \begin{cases} 1_{p_i^{e_i}\mathbb{Z}_{p_i}} & p_i \mid N \\ 1_{\mathbb{Z}_p} & p \nmid N \end{cases}$$

对应：

$$\widehat{f}_p = \begin{cases} p_i^{-e_i} \cdot 1_{p_i^{-e_i}\mathbb{Z}_{p_i}} & p_i \mid N \\ 1_{\mathbb{Z}_p} & p \nmid N \end{cases}$$

代入 PSF 中可以得到等式：

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi N^2 k^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{N} e^{-\pi k^2 / N^2}$$

补充一下 Classical Poisson Summation Formula：对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，$\widehat{f}(y) = \int_\mathbb{R} f(x) e^{2\pi\sqrt{-1}xy} dx$，有：

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(y)$$

PSF 的证明思路和 Classical PSF 的类似。

Proof. 考虑

$$\varphi(x) := \sum_{a\in F} f(x+a)$$

Fourier 分析告诉我们:

$$\varphi(x) = \sum_{a\in F} c_a \psi(-ax)$$

其中记 Ω_F 是 $\mathbb{A}_F/F$ 对应的基本区域，可以计算出:

$$\begin{aligned}
c_a &= \int_{\Omega_F} \varphi(x)\psi(ax)dx \\
&= \int_{\Omega_F} \sum_{b\in F} f(x+b)\psi(ax)\cdot 1dx \\
&= \sum_{b\in F} \int_{\Omega_F} f(x+b)\psi(ax)\psi(ab)dx \\
&= \sum_{b\in F} \int_{b+\Omega_F} f(x)\psi(ax)dx \\
&= \widehat{f}(a)
\end{aligned}$$

最后代入 $x=0$ 即得结果。 □

推论 5.1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$，$\alpha \in \mathbb{A}_F^\times$，那么有:

$$||\alpha||\cdot \sum_{x\in F} f(\alpha x) = \sum_{x\in F} \widehat{f}(\alpha^{-1}x)$$

Proof. □

练习: 定义 theta 级数:

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi n^2 t}$$

求证:

$$\theta(\frac{1}{t}) = \sqrt{t}\theta(t)$$

5.2 $\widehat{G}$

G 是局部紧的 Abel 群，

$$\widehat{G} := G \text{ 的全体连续特征}$$

可以对 $\widehat{G}$ 赋予一个拓扑：开集由：

$$W(U,K):=\{\chi\in\widehat{G}|\chi(K)\subseteq U, K\subseteq G\text{紧}, U\subseteq S^1\text{开集}\}$$

生成。

性质 5.1. $\widehat{G}$ 是局部紧的 Abel 群，并且：

(1) G 紧当且仅当 $\widehat{G}$ 离散。

(2) G 离散当且仅当 $\widehat{G}$ 紧。

性质 5.2. 有典范同构：

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \widehat{\widehat{G}} \\ g &\mapsto (\chi\to\chi(g)) \end{aligned}$$

性质 5.3. dg 是 G 上的 Haar 测度，那么在 $\widehat{G}$ 上存在唯一的 Haar 测度 $d\chi$，使得对于任何比较好的 G 上的函数 f，如果 $\widehat{G}$ 上的函数 $\widehat{f}$ 记为：

$$\widehat{f}(\chi):=\int_G f(g)\chi(g)dg$$

那么有：

$$f(g^{-1})=\int_{\widehat{G}}\widehat{f}(\chi)\chi(g)d\chi$$

例 5.3. $G=\mathbb{R}$ 时，有：

$$\widehat{G}=\{\chi_a:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^\times : x\mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}ax}, a\in\mathbb{R}\}\simeq\mathbb{R}$$

并且 $(\widehat{G},d\chi)\simeq(\mathbb{R},dx)$.

Proof. 这个命题等价于 $\widehat{\widehat{f}}(x)=f(-x)$. □

例 5.4. $G=S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 时，有：

$$\widehat{G}=\{\chi_a:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^\times : x\mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}ax}, a\in\mathbb{Z}\}\simeq\mathbb{Z}$$

并且 $(G,dg)\simeq(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta},d\theta)$ 对应 $(\widehat{G},d\chi)\simeq(\mathbb{Z},dx)$.

Proof. 这个命题等价于 Fourier 级数。 □

例 5.5. G 是有限 Abel 群时，考虑 $(G,|G|^{-1/2}dg)$，dg 为离散测度，事实上有:

$$\widehat{G}\simeq G$$

特别地，$G=\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 时，有:

$$\widehat{G}=\{\chi_a:G\to\mathbb{C}^\times:x\mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}ax/p^n},a\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}$$

并且

$$(G,|G|^{-1/2}dg)\Longrightarrow(\widehat{G},|\widehat{G}|^{-1/2}d\chi)$$

$d\chi$ 为离散测度。

练习:

(1) 证明 $\widehat{\mathbb{Z}_p}\simeq\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

(2) 证明 $\widehat{\mathbb{Q}_p}\simeq\mathbb{Q}_p$.

性质 5.4.

$$(\widehat{F_v},d\chi)\simeq(F_v,dx_v)$$

其中 $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_{F_v},dx_v)=N\mathfrak{D}_v^{-1/2}$.

性质 5.5.

$$\widehat{\mathbb{A}_F}=\{\psi(ax)|a\in\mathbb{A}_F\}$$

且

$$(\widehat{\mathbb{A}_F},d\chi)\simeq(\mathbb{A}_F,dx)$$

6 2025.8.13

6.1 Hecke 特征

注：对局部域 F，连续同态 $\chi: F^\times \to \mathbb{C}^\times$ 如果不要求 $\mathrm{Im}\,\chi \subseteq S^1$ 则称为拟特征 (quasi-character)。否则称为特征 (character)。同时，对 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 时，拟特征只能如下：

- $F=\mathbb{R}$,

$$\chi(x) = \left(\frac{x}{|x|}\right)^{\varepsilon} \cdot |x|^s \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{C}$$

- $F=\mathbb{C}$,

$$\chi(x) = \left(\frac{z}{|z|}\right)^{\varepsilon} \cdot |z|^s \quad \varepsilon \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{C}$$

对 $F/\mathbb{Q}_p$，$F^\times \simeq \pi^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{O}_F^\times$，拟特征 χ 由 $\chi(\pi)$ 和 $\chi|_{\mathcal{O}_F}$ 唯一决定：

$$\chi(z) = |z|_F^s \cdot \chi_0(z)$$

其中 χ_0 可以看成 $\chi_0: F^\times \to \mathbb{C}^\times$ 连续同态，满足 $\chi_0(\pi)=1$。对于这样的 χ_0，类似也有：

$$\exists N \quad \text{s.t.} \quad \chi_0|_{1+\pi^N \mathcal{O}_F} \equiv 1$$

特别地，χ 是特征当且仅当 $s \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ 且 χ_0 是乘法特征.

定义 6.1. 一个 Hecke 特征是特征：

$$\chi: \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times$$

且满足：

- $\chi|_{F^\times} \equiv 1$

首先：

$$\chi_v(x_v) := \chi(1,\ldots,1,x_v,1\ldots)$$
$$\chi((x_v)_v) = \prod_v \chi_v(x_v)$$

性质 6.1. $\chi: \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times$ 是一个特征，那么 $\chi = \otimes \chi_v$ 并且对几乎所有 $v \nmid \infty$，χ_v 是非分歧特征，即 $\chi_v|_{\mathcal{O}_{F_v}^\times} \equiv 1$.

性质 6.2. $\chi = \otimes\chi_v$，$\chi' = \otimes\chi'_v$ 都是 Hecke 特征，如果 $\chi_v = \chi'_v$ 对几乎所有 $v \nmid \infty$ 成立，那么 $\chi = \chi'$。

Proof. □

6.2 Hecke 函数

记 χ 是一个 Hecke 特征，S 是一个有限位集，它包含全部 $v \mid \infty$ 以及分歧的 v，那对于 $v \notin S$，根据**例 2.5**，可以定义：

$$\begin{aligned} L(s,\chi_v) &:= \int_{F_v^\times} 1_{\mathcal{O}_{F_v}}(x_v)\cdot\chi_v(x_v)\cdot|x_v|_v^s dx_v^\times \\ &= (1-\chi_v(\mathfrak{p}_v)\cdot N\mathfrak{p}_v^{-s})^{-1} \end{aligned}$$

定义 6.2.

$$L^S(s,\chi) := \prod_{v\notin S} L(s,\chi_v)$$

称为 Hecke L-function for χ associated to S.

引理 6.1. $L^S(s,\chi) := \prod_{v\notin S} L(s,\chi_v)$ 在 Re $s>0$ 上绝对收敛。

Proof. □

定理 6.1 (Baby Version)**.** (1) $L^S(s,\chi)$ 可以延拓到 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数。

(2) 存在常数 $C_{\chi,S}$ 使得

$$L^S(s,\chi) = C_{\chi,S}\cdot L^S(1-s,\chi^{-1})$$

这个定理大致想法是：取一个 $f=\otimes f_v\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$，使得 $\forall v\notin S$，$f_v=1_{\mathcal{O}_{F_v}}$，考虑：

$$\begin{aligned} Z(s,f,\chi) &:= \int_{\mathbb{A}_F^\times} f(x)\cdot\chi(x)\cdot||x||^s dx^\times \\ Z_v(s,f_v,\chi_v) &:= \int_{F_v^\times} f_v(x_v)\cdot\chi_v(x_v)\cdot|x_v|_v^s dx_v^\times \end{aligned}$$

可以证明：

$$Z(s,f,\chi) = \left(\prod_{v\in S} Z_v(s,f_v,\chi_v)\right)\cdot L^S(s,\chi)$$

研究 Z 和 Z_v 两个积分需要 Fourier 变换，下面的局部理论就是为了研究 Z_v 的。

6.3 局部理论前言

性质 6.3. $f_v \in \mathcal{S}(F_v)$，

$$Z_v(s) := \int_{F_v^\times} f_v(x_v) \cdot \chi_v(x_v) \cdot |x_v|_v^s dx_v^\times$$

Z_v 在 $\mathrm{Re}\, s > 0$ 上收敛。

Proof. □

7 2025.8.15

7.1 局部理论

定理 7.1. (1) $Z_v(s, f_v, \chi_v)$ 可以延拓到 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数。

(2) 存在亚纯函数 $\gamma(s, \chi_v, \psi_v)$ 和 f_v 无关（回顾 ψ_v 是 F_v 上的标准加法特征），使得：

$$Z_v(1-s, \widehat{f}_v, \chi_v^{-1}) = \gamma(s, \chi_v, \psi_v) \cdot Z_v(s, f_v, \chi_v)$$

Proof. (2)⇒(1)is simple. We only prove (2).

We first prove the equivalence: for all $f_v, g_v \in \mathcal{S}(F_v)$, we have:

$$Z_v(1-s, \widehat{f}_v, \chi_v^{-1}) \cdot Z_v(s, g_v, \chi_v) = Z_v(1-s, \widehat{g}_v, \chi_v^{-1}) \cdot Z_v(s, f_v, \chi_v)$$

This is because:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \int_{F_v^\times} \int_{F_v^\times} \widehat{f}_v(y) g_v(x) \chi_v^{-1}(y) \chi_v(x) |y|_v^{1-s} |x|_v^s dx^\times dy^\times \\
&= A \int_{F_v^\times} \int_{F_v^\times} \left(\int_{F_v^\times} f_v(z) \psi_v(yz) |z|_v dz^\times \right) g_v(x) \chi_v^{-1}(y) \chi_v(x) |y|_v^{1-s} |x|_v^s dx^\times dy^\times \\
&= A \int_{F_v^\times \times F_v^\times \times F_v^\times} f_v(z) g_v(x) |w|_v \psi_v(w) \chi_v(w^{-1} z x) |w^{-1} z x|_v^s dw^\times dx^\times dz^\times \\
&= \text{RHS}
\end{aligned}$$

In the third step we use the change of variable $w \to yz$ and in the last step we use symmetry of z,x.

Now we will choose suitable f_v to compute $\gamma(s, \chi_v, \psi_v)$.

(1) $F_v = \mathbb{R}$, when $\chi_v(x) = \left(\frac{x}{|x|}\right)^\varepsilon \cdot |x|^\lambda$. We note that:

$$Z_v(s, f_v, \chi_v \cdot |\cdot|^\lambda) = Z_v(s+\lambda, f_v, \chi_v)$$

the same for $Z_v(1-s, \widehat{f}_v, (\chi \cdot |\cdot|^\lambda)^{-1})$, so we only need to consider the case $\lambda = 0$.

(i) $\varepsilon = 0$, take $f_v(x) = e^{-\pi x^2}$, then $\widehat{f}_v = f_v$ and after calculation we have:

$$\gamma(s, 1, \psi_v) = \pi^{s-1/2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}$$

(ii) $\varepsilon = 1$, take $f_v(x) = x e^{-\pi x^2}$, then $\widehat{f}_v = -\sqrt{-1} f_v$ and after calculation we have:

$$\gamma(s, \mathrm{sgn}, \psi_v) = \sqrt{-1} \pi^{s-1/2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1+1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s+1}{2})}$$

(2) $F_v = \mathbb{C}$, when $\chi_v(z) = \left(\frac{z}{|z|}\right)^n \cdot |z|^\lambda$. Similarly we only need to consider the case $\lambda = 0$.

  (i) $n \in \mathbb{N}$, take $f_v(z) = \overline{z}^n e^{-2\pi z\overline{z}}$

  (ii) $n \in -\mathbb{N}^*$, take $f_v(z) = z^{-n} e^{-2\pi z\overline{z}}$

  The calculation is left for exercise.

(3) $F_v/\mathbb{Q}_p$ is a finite extension, choose $N >> 0$ such that $\chi_v|_{-1+\pi^N \mathcal{O}_{F_v}} \equiv 1$.

  We choose $f_v = 1_{-\widehat{1+\pi^N \mathcal{O}}_{F_v}}$, when $\widehat{f}_v = 1_{1+\pi^n \mathcal{O}_{F_v}}$ and $Z_v(1-s, \widehat{f}_v, \chi_v^{-1}) = [\mathcal{O}_{F_v}^\times : 1 + \pi^N \mathcal{O}_{F_v}]$ is a constant. Because $Z_v(s, f_v, \chi_v)$is holomorphic in Re$s > 0$, we have $\gamma(s, \chi_v, \psi_v)$ is meromorphic in Re$s > 0$.

  Similarly we choose $f_v = 1_{1+\pi^N \mathcal{O}_{F_v}}$. We can calculate $Z_v(s, f_v, \chi_v)$ and get a constant. Then we will know γ is holomorphic in Re$s < 1$.

Finally we get $\gamma(s, \chi_v, \psi_v)$ is meromorphic in $\mathbb{C}$ in all these cases. □

我们一般称上述 γ 为伽马因子 (gamma factor).
练习： $F = \mathbb{Q}_p$，$p \geqslant 3$ 素数，χ_p 是非分歧特征，即 $\chi_p|_{\mathbb{Z}_p^\times} \equiv 1$。记 $\chi_p(p) = a$，计算 $\gamma_p(s, \chi_p, \psi_p)$.

8 2025.8.18

8.1 整体理论

定理 8.1. (1) $Z(s,f,\chi)$ 可以延拓到 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数，使得：

$$Z(s,f,\chi)=Z(1-s,\widehat{f},\chi^{-1})$$

(2) 如果 $\chi\neq||\cdot||^{\lambda}$，则 $Z(s,f,\chi)$ 是整函数。

(3) 如果 $\chi=||\cdot||^{\lambda}$，则 $Z(s,f,\chi)$ 唯二的奇点是 $s=-\lambda$ 和 $s=1-\lambda$，并且都是单奇点，留数分别为 $\widehat{f}(0)\mathrm{vol}(\mathbb{A}_F^{\times,1}/F^{\times})$ 和 $-f(0)\mathrm{vol}(\mathbb{A}_F^{\times,1}/F^{\times})$。

证明需要用到如下引理。

引理 8.1. $\mathbb{A}_F^{\times}$ 上的 Hecke 特征 $\chi|_{\mathbb{A}_F^{\times,1}}\neq 1$ 时，记 Ω 是 $\mathbb{A}_F^{\times,1}/F^{\times}$ 的基本区域，

$$\int_{\Omega}\chi(x)dx^{\times}=0$$

Proof. 记 $\prod_{v\nmid\infty}\mathcal{O}_{F_v}^{\times}\times\prod_{v|\infty}F_v^{\times,1}/\mathcal{O}_F^{\times}$ 的基本区域是 Ω^1，同时熟知有短正合列：

$$1\to\prod_{v\nmid\infty}\mathcal{O}_{F_v}^{\times}\times\prod_{v|\infty}F_v^{\times,1}/\mathcal{O}_F^{\times}\to\mathbb{A}_F^{\times,1}/F^{\times}\to\mathrm{Cl}(F)\to 1$$

相当于 Ω 可以分拆成 h_F 个和 Ω^1 同胚的部分，

分类讨论：

(1) $\chi|_{\Omega^1}\equiv 1$ 时，记 $\Omega=\bigsqcup_{i=1}^{h}\alpha_i\Omega^1$，则有：

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\chi(x)dx^{\times}&=\sum_{i=1}^{h}\int_{\alpha_i\Omega^1}\chi(x)dx^{\times}\\&=\sum_{i=1}^{h}\chi(\alpha_i)\cdot\mathrm{vol}(\Omega^1)=0\end{aligned}$$

最后一步是因为 χ 可以看成 $\mathrm{Cl}(F)$ 的特征且由条件知一定非平凡。

(2) $\chi|_{\Omega^1}\neq 1$ 时，断言：$\int_{\Omega^1}\chi(x)dx^{\times}=0$。记 $\chi=\otimes_{v\nmid\infty}\chi_v\otimes\chi_{\infty}$，则有：

$$\int_{\Omega^1}\chi(x)dx^{\times}=\prod_{v\nmid\infty}\int_{\mathcal{O}_{F_v}^{\times}}\chi_v(x_v)dx_v^{\times}\cdot\int_{\Omega^2}\chi_{\infty}(x_{\infty})dx_{\infty}^{\times}$$

其中 Ω^2 是 $\prod_{v|\infty}F_v^{\times,1}/\mathcal{O}_F^{\times}$ 的基本区域。

此时还有：要么存在 $v\nmid\infty$ 使得 $\chi_v|_{\mathcal{O}_{F_v}^{\times}}\neq 1$ 要么 $\chi_{\infty}|_{\Omega^2}\neq 1$，

若为前者，则对这个 v 有 $\int_{\mathcal{O}_{F_v}^{\times}}\chi_v dx_v^{\times}=0$，这是因为 $\chi_v|_{1+\pi^n\mathcal{O}_{F_v}}\equiv 1$，考虑 $\mathcal{O}_{F_v}^{\times}/1+\pi^n\mathcal{O}_{F_v}$ 即可。

若为后者，利用 Dirichlet 单位定理：

$$\begin{aligned}\Omega^2 &\simeq \{\pm 1\} \times (S^1)^{r_2} \times ((\mathbb{R}_{>0})^{r_1+r_2})^1 / U_F \times W_F \\ &\simeq \{\pm 1\} \times (S^1)^{r_2} \times (S^1)^{r_1+r_2-1} / W_F\end{aligned}$$

所以可以看成：

$$\int_{\Omega^2} \chi_\infty(x_\infty) dx_\infty^\times = \frac{1}{\omega_F} \prod_{i=1}^{r_1} \int_{\{\pm 1\}} \chi_i(x) dx \cdot \prod_{j=1}^{r_1+2r_2-1} \int_{(S^1)} \chi_j(x) dx$$

只要说明对于 $\{\pm 1\}$ 和 S^1 上的非平凡特征，对应 $\int \chi dx = 0$ 即可。这个时候特征是可以显式写出来的，代入计算即可。

□

回到**定理 8.1** 的证明：

Proof. 记：

$$\begin{aligned}Z(s,f,\chi) &:= Z^{>1}(s,f,\chi) + Z^{<1}(s,f,\chi) \\ &:= \int_{\mathbb{A}_F^{\times,>1}} f(x) \cdot \chi(x) \cdot ||x||^s dx^\times + \int_{\mathbb{A}_F^{\times,<1}} f(x) \cdot \chi(x) \cdot ||x||^s dx^\times\end{aligned}$$

$Z^{>1}(s,f,\chi)$ 是整函数，对于 $Z^{<1}(s,f,\chi)$，可以利用 PSF 计算得到：

$$\begin{aligned}Z^{<1}(s,f,\chi) &= \sum_{\alpha \in F^\times} \int_{\Omega^{<1}} f(\alpha x) \cdot \chi(x) \cdot ||x||^s dx^\times \\ &= \int_{\Omega^{<1}} \sum_{\alpha \in F} f(\alpha x) \cdot \chi(x) \cdot ||x||^s dx^\times - \int_{\Omega^{<1}} f(0) \cdot \chi(x) \cdot ||x||^s dx^\times \\ &= \int_{\Omega^{<1}} \sum_{\alpha \in F} \widehat{f}(\alpha x^{-1}) \cdot \chi(x^{-1}) \cdot ||x||^{s-1} dx^\times - f(0) \int_{\Omega^{<1}} \chi(x) \cdot ||x||^s dx^\times \\ &= Z^{>1}(1-s, \widehat{f}, \chi^{-1}) - f(0) \int_{\Omega^{<1}} \chi(x) \cdot ||x||^s dx^\times + \widehat{f}(0) \int_{\Omega^{<1}} \chi(x) \cdot ||x||^{s-1} dx^\times\end{aligned}$$

其中 $\Omega^{<1}$ 是 $\mathbb{A}_F^{\times,<1}/F^\times$ 的基本区域，中间有换元 $y \to x^{-1}$。

注意到引理中的条件和定理中的条件有如下等价关系：

$$\begin{aligned}\chi|_{\mathbb{A}_F^{\times,1}} \equiv 1 &\iff \mathbb{R}_{>0} \simeq \mathbb{A}_F^\times / \mathbb{A}_F^{\times,1} \to \mathbb{C}^\times : x \mapsto ||x||^\lambda \text{ for some } \lambda \in \sqrt{-1}\mathbb{R} \\ &\iff \chi = ||\cdot||^\lambda \text{ for some } \lambda \in \sqrt{-1}\mathbb{R}\end{aligned}$$

(2) 当 $\chi \neq ||\cdot||^\lambda$ 时，结合引理可知此时：$Z^{<1}(s,f,\chi) = Z^{>1}(s,\widehat{f},\chi^{-1})$，从而 $Z(s,f,\chi)$ 是整函数。

(3) 当 $\chi = ||\cdot||^\lambda$ 时，对 $t = s, s-1$，结合 $\Omega^{<1} \simeq \Omega \times (0,1)$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^{<1}} \chi(x)\cdot||x||^t dx^\times &= \int_{\Omega^{<1}} ||x||^{t+\lambda} dx^\times \\ &= \int_0^1 r^{t+\lambda}\frac{dr}{r}\cdot \mathrm{vol}(\mathbb{A}_F^{\times,1}/F^\times) \\ &= \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{A}_F^{\times,1}/F^\times)}{t+\lambda}\end{aligned}$$

于是此时 $Z(s,f,\chi)$ 唯二的奇点是 $s=-\lambda$ 和 $s=1-\lambda$,并且都是单奇点,留数分别为 $\widehat{f}(0)\mathrm{vol}(\mathbb{A}_F^{\times,1}/F^\times)$ 和 $-f(0)\mathrm{vol}(\mathbb{A}_F^{\times,1}/F^\times)$。

(1) 将 $Z^{<1}$ 全写成 $Z^{>1}+\dots$ 形式可计算得:

$$\begin{aligned}Z(s,f,\chi) - Z(1-s,\widehat{f},\chi^{-1}) &= Z^{>1}(s,f,\chi) + Z^{<1}(s,f,\chi) - Z^{>1}(1-s,\widehat{f},\chi^{-1}) - Z^{<1}(1-s,\widehat{f},\chi^{-1}) \\ &= Z^{>1}(s,f,\chi) - Z^{>1}(s,\widehat{\widehat{f}},\chi) = 0\end{aligned}$$

最后一步因为 $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$。

□

8.2 回到 $L^S(s,\chi)$

定理 8.2. S 是 F 上的一个有限位集，且包含全体 $v|\infty$ 以及全体分歧的 v。回顾

$$L^S(s,\chi) := \prod_{v\notin S}\int_{F_v^\times} 1_{\mathcal{O}_{F_v}^\times}(x)\cdot\chi(x)\cdot|x|_v^s dx^\times$$

(1) $L^S(s,\chi)$ 可以被延拓成 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数。

(2) 当 $\chi \neq ||\cdot||^\lambda$ 时，$L^S(s,\chi)$ 是整函数。

(3) 当 $\chi = ||\cdot||^\lambda$ 时，$L^S(s,\chi)$ 唯二的奇点是 $s=-\lambda$ 和 $s=1-\lambda$，并且都是单奇点。

(4)

$$L^S(x,\chi) = \left(\prod_{v\in S}\gamma_v(s,\chi_v,\psi_v)\right)\cdot L^S(1-s,\chi^{-1})$$

Proof. (1) 和 (4) 是显然的推论，(2) 和 (3) 可以一起证：对于等式：

$$Z(s,f,\chi) = \left(\prod_{v\in S} Z_v(s,f_v,\chi_v)\right)\cdot L^S(s,\chi)$$

对任意 s_0，只要对 $v\in S$ 且 $v\nmid\infty$，取 $f_v = 1_{1+\pi^N\mathcal{O}_{F_v}}$，其中 N 足够大使得 $\chi_v|_{1+\pi^N\mathcal{O}_{F_v}} \equiv 1$；对 $v\mid\infty$，取 f_v 使得紧支集是 1 的一个足够小的邻域就行。此时 $\prod_{v\in S} Z_v(s,f_v,\chi_v)$ 全纯且在 s_0 处不等于 0，特

别地，此时对于 $v \nmid \infty$，可以计算出 Z_v 是非零常数。若 s_0 是 $L^S(s,\chi)$ 的一个奇点，则也是 $Z(s,f,\chi)$ 的一个奇点，于是由**定理 8.1** 可得 (2)(3) 成立。 $\square$

9 2025.8.20

9.1 Dirichlet 特征诱导 Hecke 特征

定义 9.1. 对于特征 $\chi : (\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$，$l$ 是素数，定义 $\chi_l : \mathbb{Q}_l^\times \to \mathbb{C}^\times$ 为:

$$\chi_l|_{\mathbb{Z}_l^\times} = \begin{cases} 1 & l \neq p \\ \chi^{-1}|_{\mathbb{Z}_p^\times} & l = p \end{cases}$$

其中 $\chi^{-1}|_{\mathbb{Z}_p^\times}$ 由 $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times/(1+p^e\mathbb{Z}_p) \simeq (\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ 而来。

$$\chi_l(l) = \begin{cases} \chi(l) & l \neq p \\ 1 & l = p \end{cases}$$

$l = \infty$ 时定义:

$$\chi_\infty(x) = \begin{cases} 1 & \chi(-1) = 1\text{时} \\ \dfrac{x}{|x|} & \chi(-1) = -1\text{时} \end{cases}$$

性质 9.1. 再定义

$$\widetilde{\chi} := \bigotimes_{l\text{素数}} \chi_l \otimes \chi_\infty$$

$\widetilde{\chi}$ 是 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$ 上的一个 Hecke 特征.

Proof. □

推论 9.1. $N = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r} \in \mathbb{N}^*$，对于特征 $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$，记 $\chi_i : (\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ 由 χ 诱导出来的，可以由上得到 $\chi_{i,l} : \mathbb{Q}_l^\times \to \mathbb{C}^\times$，进而得到 $\widetilde{\chi_i} : \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}^\times$，定义:

$$\widetilde{\chi} := \widetilde{\chi_1} \dots \widetilde{\chi_r}$$

则 $\widetilde{\chi}$ 是 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$ 上的一个 Hecke 特征，并且对任何 $p \nmid N$，有 $\chi(p) = \widetilde{\chi}(p)$.

Proof. exercise. □

同时可以注意到:

$$\begin{aligned} \chi\text{在素数}p\text{处分歧} &\iff (\chi_{1,p} \dots \chi_{r,p})|_{\mathbb{Z}_p^\times} \equiv 1 \\ &\Longleftarrow p \nmid N \end{aligned}$$

如果 $p|N$，不妨设 $p=p_1$，那么对于 $x\in\mathbb{Z}_p^\times$，有：

$$(\chi_{1,p}\dots\chi_{r,p})(x)=\chi_1^{-1}(x)\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1=\chi_1^{-1}(x)$$

9.2 Dirichlet L-函数是特殊的 Hecke L-函数

同时可以得到：若取 $S=\{\infty\}\cup\{p|N\}$，则有：

$$L^S(s,\widetilde{\chi})=L(s,\chi)$$

代表可以把 Dirichlet L-函数看成一个 Hecke L-函数。

定理 9.1. $\chi:(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{C}^\times$ 是一个 Dirichlet 特征，由上得到 $\widetilde{\chi}$ 是一个 Hecke 特征，

(1) $L(s,\chi)$ 可以延拓到 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数，并且当 χ 非平凡时不是全纯函数。

(2) 记

$$L_\infty(s,\chi):=\begin{cases}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) & \chi(-1)=1\text{时}\\ \pi^{-(s+1)/2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) & \chi(-1)=-1\text{时}\end{cases}$$
$$\Lambda(s,\chi):=L(s,\chi)\cdot L_\infty(s,\chi)$$

则有：

$$\Lambda(s,\chi)=c_\chi\cdot N^{-s+\frac{1}{2}}\cdot\Lambda(1-s,\chi^{-1})$$

最后一个等式等价于：

$$L(s,\chi)=c_\chi\cdot N^{-s+\frac{1}{2}}\cdot\frac{L_\infty(1-s,\chi^{-1})}{L_\infty(s,\chi)}\cdot L(1-s,\chi^{-1})$$

Proof.

$$\begin{aligned}L(s,\chi)&=\prod_{p|N}\gamma_p(s,(\widetilde{\chi})_p,\psi_p)\cdot\gamma_\infty(s,(\widetilde{\chi})_\infty,\psi_\infty)\cdot L(1-s,\chi^{-1})\\&=\left(\prod_{p_i|N}p_i^{-e_is+\frac{e_i}{2}}G(\chi_i)\right)\cdot\left((-\sqrt{-1})^\varepsilon\frac{L_\infty(1-s,\chi^{-1})}{L_\infty(s,\chi)}\right)\cdot L(1-s,\chi^{-1})\end{aligned}$$

其中 $(\widetilde{\chi})_v$ 指 $\widetilde{\chi}$ 在位 v 处的”限制”，$\chi_i:(\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{C}^\times$ 是由 χ 诱导出来的特征。

$$G(\chi_i):=p_i^{-e_i/2}\sum_{a\in(\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z})^\times}e^{2\pi\sqrt{-1}a/p_i^{e_i}}\chi_i(a)$$

ε 满足 $\chi(-1) = (-1)^{\varepsilon}$.

其中用 $\dfrac{Z_p(1-s,\widehat{f},\chi^{-1})}{Z_p(s,f,\chi)}$ 计算 γ_p 时带入的是 $f = 1_{1+p^e\mathbb{Z}_p}$. $\square$